

# **Estimateurs statistiques des paramètres du processus multifractionnaire stable harmonisable**

Ayache Antoine, Louckx Christophe

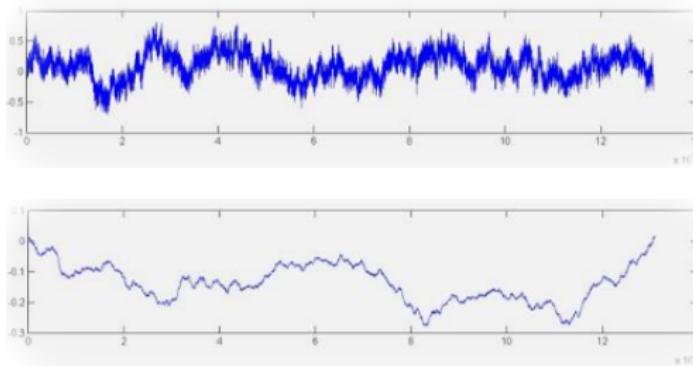
Laboratoire Paul Painlevé, Lille, France

# Organisation de l'intervention

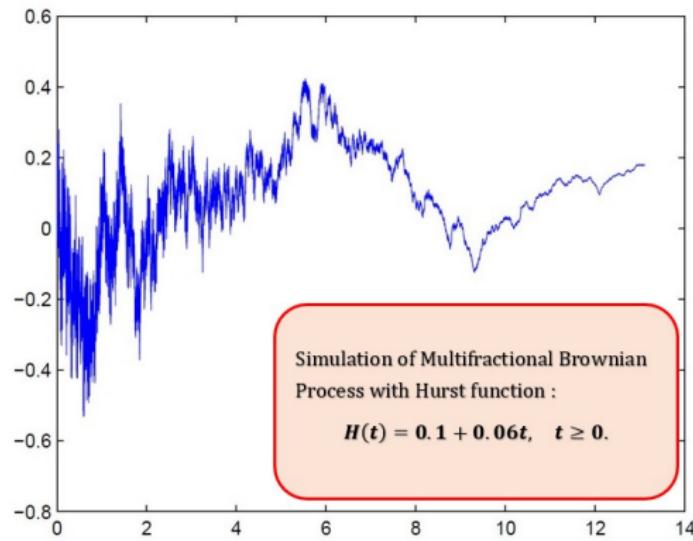
- 1 Du brownien fractionnaire au multifractionnaire stable harmonisable
- 2 Stratégies d'estimation dans les cadres du PFSL et du PFSH
- 3 Adaptation de la stratégie au cadre multifractionnaire stable harmonisable
- 4 Perspective d'amélioration en vue de simulations

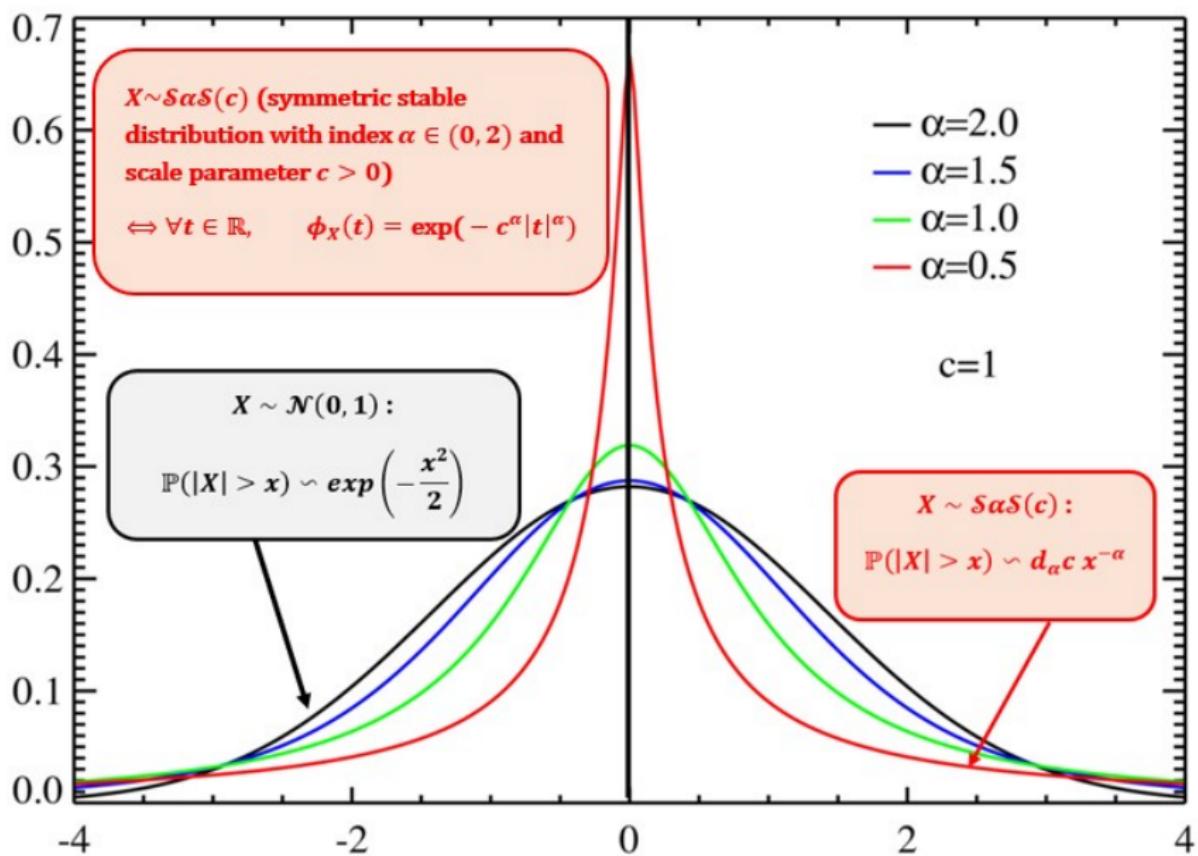
Le Mouvement Brownien Fractionnaire (MBF) est une généralisation du Mouvement Brownien introduit par Kolmogorov en 1940 puis rendu célèbre dans les années 70 pour ses applications dans divers domaines par Mandelbrot puis Van Ness. Dépendant d'un indice de Hurst  $H \in ]0, 1[$ , le MBF possède des trajectoires continues presque sûrement avec pour tout point  $\tau$ , un exposant de Hölder (presque sûrement) égal à  $H$ . Notons enfin que le Mouvement Brownien est le MBF pour  $H = 1/2$ .

Voici deux simulations du MFB, d'abord avec  $H$  proche de 0, ensuite avec  $H$  proche de 1.



Dans les années 90, Benassi, Jaffard, Lévy-Vehel, Peltier et Roux ont introduit le Mouvement Brownien Multifractionnaire, une généralisation du Mouvement Brownien Fractionnaire (MBF). Le MBM permet une plus grande flexibilité pour les applications en modélisation par rapport aux processus fractionnaires. Cela est particulièrement pertinent en finance (par exemple : Bianchi et Pianese (2014, Risk and Dec. An.)) grâce à la possibilité de moduler la régularité Höldérienne des trajectoires à l'aide de la fonction  $H$ . Voici une illustration.





Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé complet. Dans le cadre des processus stables, deux extensions du Mouvement Multifractionnaire Brownien (MBM) peuvent être définies.

## Définition 1

*Soit  $\alpha$  un réel dans l'intervalle  $(0, 2]$ . Le Processus Multifractionnaire Stable Harmonisable (PMSH) est un processus de fonction de Hurst  $H : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$ . Il est défini pour tout réel  $t$  par l'expression suivante :*

$$Z(t) = \Re e \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H(t) + \frac{1}{\alpha}}} d\tilde{M}_{\alpha}(\xi) \right), \quad (1.1)$$

*où  $\tilde{M}_{\alpha}$  désigne une mesure complexe  $\alpha$ -stable, invariante par rotation sur  $\mathbb{R}$ , avec pour mesure de contrôle la mesure de Lebesgue.*

- Lorsque  $\alpha = 2$ ,  $\tilde{M}_2$  correspond à la mesure de Wiener orthogonalement dispersée, ce qui donne la représentation harmonisable du MBM.
- Pour plus de détails sur la mesure  $\tilde{M}_{\alpha}$ , nous vous renvoyons à l'ouvrage de Taqqu et Samorodnitsky (1994, Chapman and Hall).

Il convient de ne pas confondre ce processus avec le Processus Multifractionnaire Stable Linéaire (PMSL).

## Définition 2

*Soit  $\alpha$  un réel dans l'intervalle  $(0, 2]$ . Le Processus Multifractionnaire Stable Linéaire (PMSL) de fonction de Hurst  $H : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$  est défini pour tout réel  $t$  par :*

$$Y(t) = \int_{\mathbb{R}} \left( (t-s)_+^{H(t)-\frac{1}{\alpha}} - (-s)_+^{H(t)-\frac{1}{\alpha}} \right) dM_\alpha(s), \quad (1.2)$$

où  $M_\alpha$  est une mesure réelle symétrique  $\alpha$ -stable sur  $\mathbb{R}$ , avec pour mesure de contrôle la mesure de Lebesgue, et où pour tous réels  $x, \beta$ ,  $(x)_+^\beta = 0$  si  $x \leq 0$ ,  $(x)_+^\beta = x^\beta$  sinon.

- Lorsque  $\alpha = 2$ , on retrouve la représentation en moyenne mobile du MBM.
- Lorsque  $\alpha \in ]0, 2[$ , Stoev et Taqqu (2005, Fractals) ont démontré que, pour deux réels  $a < b$ , si  $\sup_{t \in ]a, b[} H(t) < \min\{\alpha^{-1}, 1\}$ , alors toutes les versions de  $Y$  ont des trajectoires non bornées sur tout sous-intervalle non vide  $]a', b'[\subset]a, b[$ .

Dans notre article Ayache et Louckx (2025, SPA), nous avons établi un résultat dont une importante conséquence est le théorème suivant.

### Théorème 1

*Si la fonction  $H$  prend des valeurs dans un intervalle  $[\underline{H}, \bar{H}] \subset ]0, 1[$  et est  $\gamma$ -Höldérienne pour  $\gamma \in ]\bar{H}, 1]$ , alors*

$$\mathbb{P}(\forall \tau \in \mathbb{R}, \varrho_Z(\tau) = H(\tau)) = 1. \quad (1.3)$$

Cela met en évidence l'intérêt de l'extension du MBM qu'est le PMSH, puisque le MBM devient un cas particulier concernant la propriété (1.3) de régularité du PMSH lorsqu'on a  $\alpha = 2$ . En effet, cette propriété (1.3) a déjà été établie pour le MBM dans Ayache, Jaffard et Taqqu (2007, Rev. Mat. Iber.).

Signalons que Benassi, Jaffard et Roux avaient prouvé auparavant sous ces hypothèses que

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\varrho_Z(\tau) = H(\tau)) = 1.$$

## L'estimation statistique de la fonction de Hurst est un élément clé pour exploiter un processus multifractionnaire en modélisation.

La recherche d'estimateurs statistiques pour la fonction de Hurst des processus multifractionnaires a suscité un vif intérêt au cours des deux dernières décennies. Voici quelques travaux récents qui ont répondu à cet objectif :

- Pour divers processus multifractionnaires gaussiens, Bardet et Surgailis (2013, SPA) ont développé des estimateurs de la fonction de Hurst.
- Ayache et Bouly (2023, ALEA), ont construit un estimateur de la fonction de Hurst (supposée aléatoire) d'un processus multifractionnaire non gaussien défini par une intégrale d'Itô.
- **Dans le cadre stable (non gaussien lorsque  $\alpha \neq 2$ ), il est également crucial d'estimer le paramètre de stabilité  $\alpha$ , qui caractérise les queues des lois marginales du processus.**

Ayache et Hamonier (2015, Lith. Math. J., puis 2017, Bernoulli) lorsque le PMSL possède une version à trajectoires continues ainsi que Dang (2020, ESAIM: Prob., Stats), lui pour tous les cas de figure, ont élaboré des estimateurs pour la fonction de Hurst du PMSL et pour le paramètre de stabilité  $\alpha$ .

À notre connaissance, aucun article ne traite des estimateurs statistiques des paramètres du PMSH.

**Le but de notre travail est de construire des estimateurs statistiques consistants et asymptotiquement normaux pour le paramètre de stabilité  $\alpha$  et la fonction de Hurst du PMSH, point par point.**

Dans le cadre des processus multifractionnaires browniens et stables, linéaire comme harmonisable, l'une des majeures difficultés provient de la perte des propriétés d'autosimilarité et de stationnarité des accroissements.

# Organisation de l'intervention

- 1 Du brownien fractionnaire au multifractionnaire stable harmonisable
- 2 Stratégies d'estimation dans les cadres du PFSL et du PFSH
- 3 Adaptation de la stratégie au cadre multifractionnaire stable harmonisable
- 4 Perspective d'amélioration en vue de simulations

## L'exemple du Processus Fractionnaire Stable Linéaire (PFSL)

Dans le cas du PFSL, que nous noterons ici  $L$ , l'ergodicité de ce processus joue un rôle crucial pour l'estimation de son paramètre de Hurst  $H$ . Présentons une méthode d'ondelette qu'a utilisée Taqqu et plusieurs auteurs.

Soit  $\psi$  une ondelette mère bien choisie, définie sur  $\mathbb{R}$ . Et, soit pour tous  $j, k \in \mathbb{Z}$ , et tout réel  $t$ ,

$$\psi_{j,k} = \psi(2^j t - k). \quad (2.4)$$

La transformée discrète d'ondelette  $\mathcal{W}_{j,k}(L)$ ,  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ , du PFSL est donnée par

$$\mathcal{W}_{j,k}(L) := \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(t) L(t) dt = 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} \psi(t' - k) L(2^{-j} t') dt'. \quad (2.5)$$

Pour chaque  $\gamma \in ]0, \alpha[$  fixé, les statistiques  $V_{j,\gamma}^{2^j}(L)$  sont définies par

$$V_{j,\gamma}^{2^j}(L) := \sum_{k=1}^{2^j} |\mathcal{W}_{j,k}(L)|^\gamma. \quad (2.6)$$

L'autosimilarité du processus  $L$  implique que, pour chaque  $j \in \mathbb{N}^*$  fixé,

$$V_{j,\gamma}^{2^j}(L) \stackrel{d}{=} 2^{-j(1+H)\gamma} V_{0,\gamma}^{2^j}(L) = 2^{-j(1+H)\gamma} \sum_{k=1}^{2^j} |\mathcal{W}_{0,k}(L)|^\gamma. \quad (2.7)$$

De plus, la propriété fondamentale d'ergodicité du PFSL implique que le processus stationnaire  $\{\mathcal{W}_{0,k}(L)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  est lui-même ergodique. Ainsi, en faisant usage du théorème ergodique de Birkhoff, nous obtenons la convergence suivante:

$$2^{-j} V_{0,\gamma}^{2^j}(L) \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}\left(|\mathcal{W}_{0,0}(L)|^\gamma\right). \quad (2.8)$$

Donc, il résulte de (2.7) and (2.8) que

$$H_{j,\gamma}(L) := \gamma^{-1} - 1 - (\gamma j)^{-1} \log_2 (V_{j,\gamma}^{2^j}(L)) \quad (2.9)$$

est un estimateur statistique du paramètre de Hurst  $H$  du PFSL  $L$ .

**Malheureusement, une telle stratégie ne fonctionne plus pour le Processus Fractionnaire Stable Harmonisable puisqu'il n'est pas ergodique. Pour une démonstration de ce fait, nous renvoyons à Cambanis, Hardin et Weron (1987, SPA).**

Ainsi, la non-ergodicité du PFSH est une difficulté majeure qui intervient donc aussi pour le cas du PMSH.

Néanmoins, nous garderons en tête la méthode qui permet de passer d'une estimation du paramètre de Hurst  $H$  du PFSL  $L$  à l'estimation de  $H(t)$  ( $t$  fixé) pour le PMSL  $Y$  que nous allons rapidement esquisser ci-après.

## Estimation localisée pour le PMSL

On considère le champ stochastique générateur  $\tilde{Y} := \{\tilde{Y}(u, v), (u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 1[\}$  de  $Y$ , défini pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 1[$  par

$$\tilde{Y}(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \left( (u - s)_+^{v - \frac{1}{\alpha}} - (-s)_+^{v - \frac{1}{\alpha}} \right) dM_{\alpha}(s) \quad (2.10)$$

Nous avons alors la relation fondamentale, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$Y(t) = \tilde{Y}(t, H(t)). \quad (2.11)$$

Nous définissons alors les variables aléatoires  $\tilde{\mathcal{W}}_{j,k}(Y)$  similaires à  $\mathcal{W}_{j,k}(L)$  et définies pour tous  $j \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$  par

$$\tilde{\mathcal{W}}_{j,k}(Y) := 2^j \int_{\mathbb{R}} \psi(2^j s - k) Y(s) ds. \quad (2.12)$$

Alors, nous déduisons de (2.11) et (2.12) l'égalité:

$$\tilde{\mathcal{W}}_{j,k}(Y) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \tilde{Y}(2^{-j}x + 2^{-j}k, H(2^{-j}x + 2^{-j}k)) dx. \quad (2.13)$$

Si nous choisissons des entiers naturels  $k$  vérifiant  $|2^{-j}k - t| < 2^{-\varphi(j)}$ , où  $(\varphi(j))_{j \in \mathbb{N}^*}$  désigne une suite d'entiers naturels non nuls croissante et divergente vers  $+\infty$  bien choisie, alors nous aurons,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(Y) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \widetilde{Y}(2^{-j}x + 2^{-j}k, \textcolor{red}{H}(2^{-j}x + 2^{-j}k)) dx \\ &\approx \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \widetilde{Y}(2^{-j}x + 2^{-j}k, \textcolor{blue}{H}(t)) dx.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Ainsi, en fixant  $t$ , la stratégie est la suivante:

- On définit un estimateur noté  $H_{j,\gamma}(t)$  de  $H(t)$  à partir du PFSL  $\widetilde{Y}(\bullet, H(t))$  à partir du travail précédent sur  $L$ ,
- On définit un estimateur analogue nommé  $\widetilde{H}_{j,\gamma}(t)$  en partant du PMSL  $Y$ .
- Cette approximation permet de comparer  $\widetilde{H}_{j,\gamma}(t)$  à l'estimateur  $H_{j,\gamma}(t)$ , on montre que la distance entre ces deux estimateurs tend vers 0. On parvient finalement à montrer que  $\widetilde{H}_{j,\gamma}(t)$  est bien un estimateur de  $H(t)$  pour  $Y$ .

## Estimateurs dans le cas du PFSH

Dans un article récent (Ayache (2024, EJS)), des estimateurs statistiques ont été proposés pour estimer le paramètre de stabilité  $\alpha$  ainsi que le paramètre de Hurst  $H \in (0, 1)$  pour le Processus Fractionnaire Stable Harmonisable (PSFH).

Nous notons  $Z_H$  un PFSH de paramètre de stabilité  $\alpha \in ]0, 2]$  et de paramètre de Hurst  $H \in ]0, 1[$ .

Considérons une fonction paire  $\psi$  à valeurs réelles régulière à support contenu dans  $[-4^{-1}, 4^{-1}]$ , et telles que si  $\widehat{\psi}$  désigne la transformée de Fourier, il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout réel  $\xi$ ,

$$|\widehat{\psi}| \leq c(1 + |\xi|)^{-3}. \quad (2.15)$$

De telles fonctions  $\psi$  et  $\widehat{\psi}$  sont connues explicitement.

À partir de  $\psi$ , on construit la suite de fonctions  $(\psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  définie par :

$$\psi_{j,k}(\xi) = \psi(2^j \xi - k), \text{ pour tous } j, k \in \mathbb{Z} \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Pour chaque  $j, k \in \mathbb{Z}$ , désignons par  $\widehat{\psi}_{j,k}$  la transformée de Fourier de  $\psi_{j,k}$ .  
 Nous introduisons les intégrales le long de la trajectoire de  $Z_H$ , pour tous  $j, k \in \mathbb{Z}$ ,

$$Y_{j,k} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \Re(\widehat{\psi}_{j,k}(s)) Z_H(s) ds. \quad (2.17)$$

Les  $Y_{j,k}$  issue de  $Z_H$  sont des variables aléatoires symétriques  $\alpha$ -stables, ayant des propriétés très commodes.

### Lemme 1

Pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$  arbitrairement fixé, nous avons les propriétés suivantes.

- (i) Alors  $(Y_{j,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- (ii) Les deux suites de variables aléatoires  $(Y_{j+1,2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$  et  $(Y_{j,2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$  sont indépendantes.
- (iii) Les deux suites  $(Y_{j,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $(2^{-(j-1)H} Y_{1,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  ont la même loi (au sens des lois fini-dimensionnelles).

Dans l'article d'Ayache (2024, EJS), il est supposé que l'on observe une trajectoire de  $Z_H$  en temps continu sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Dans cet article, ont été établis les deux théorèmes suivants qui contournent la non-ergodicité précédemment mentionnée du PFSH.

## Théorème 2

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère

$$\widehat{\alpha}_{n,\log_2}^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (\log_2 |Y_{1,2p-1}| - \log_2 |Y_{2,4p-1}|), \quad (2.18)$$

$$\widehat{H}_{n,\log_2} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (\log_2 |Y_{2,2p-1}| - \log_2 |Y_{1,2p-1}|), \quad (2.19)$$

où  $Y_{1,2p-1}$ ,  $Y_{2,2p-1}$  et  $Y_{2,4p-1}$  ont été définies dans (2.17).

Alors  $\widehat{\alpha}_{n,\log_2}^{-1}$  et  $\widehat{H}_{n,\log_2}$  sont des estimateurs statistiques fortement consistants (convergences presque sûres) respectivement de l'inverse  $\alpha^{-1}$  du paramètre  $\alpha$  de stabilité du processus  $Z_H$ , et de son paramètre de Hurst  $H$ .

## Définissons

$$G(\alpha^{-1}) = (2\text{Var}(\log_2 |W_{(\alpha)}|))^{-1/2}, \text{ pour tout } \alpha^{-1} \in [2^{-1}, +\infty[, \quad (2.20)$$

où pour tout  $\alpha \in ]0, 2]$ ,  $W_{(\alpha)}$  désigne une variable aléatoire symétrique stable d'indice de stabilité  $\alpha$  (c'est une loi gaussienne centrée  $\mathcal{N}(0, 2)$  si  $\alpha = 2$ ). La fonction  $G$  est strictement positive et continue sur  $[2^{-1}, +\infty[$ .

### Théorème 3

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les variables aléatoires  $D_{1,n,\log_2}$  et  $D_{2,n,\log_2}$  sont définies par

$$D_{1,n,\log_2} = G(2^{-1} \vee \widehat{\alpha}_{n,\log_2}^{-1}) n^{1/2} (\widehat{H}_{n,\log_2} - H), \quad (2.21)$$

et

$$D_{2,n,\log_2} = G(2^{-1} \vee \widehat{\alpha}_{n,\log_2}^{-1}) n^{1/2} (\widehat{\alpha}_{n,\log_2}^{-1} - \alpha^{-1}), \quad (2.22)$$

où pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \vee b := \max\{a, b\}$ , et où  $G$  est la fonction strictement positive spécifiée dans (2.20). Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $D_{1,n,\log_2}$  et  $D_{2,n,\log_2}$  convergent toutes les deux en loi vers deux variables aléatoires ayant pour loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

# Organisation de l'intervention

- 1 Du brownien fractionnaire au multifractionnaire stable harmonisable
- 2 Stratégies d'estimation dans les cadres du PFSL et du PFSH
- 3 Adaptation de la stratégie au cadre multifractionnaire stable harmonisable
- 4 Perspective d'amélioration en vue de simulations

À partir de maintenant,  $H : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$  vérifie les hypothèses suivantes.

- $H(\mathbb{R}) \subset [\underline{H}, \bar{H}] \subset ]0, 1[,$
- $H$  est  $\gamma$ -Höldérienne sur  $\mathbb{R}$  pour  $\gamma \in ]\bar{H}, 1]$ .

Considérons le champ générateur  $X := \{X(u, v), (u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 1[\}$  défini par

$$X(u, v) = \Re \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iu\xi} - 1}{|\xi|^{v+1/\alpha}} d\tilde{M}_{\alpha}(\xi) \right). \quad (3.23)$$

Nous avons alors, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$Z(s) = X(s, H(s)). \quad (3.24)$$

Tout d'abord, si nous devons modifier la définition des  $Y_{j,k}$ , car sinon pour tous  $j \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$Y_{j,k} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \Re(\widehat{\psi}_{j,k}(s)) Z_H(s) ds = \frac{2^{-j}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(2^{-j}ks) \widehat{\psi}(2^{-j}s) Z_H(s) ds, \quad (3.25)$$

mais lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$ , la fonction  $s \mapsto \widehat{\psi}(2^{-j}s)$  devient de moins en moins localisée.

Pour pallier ce problème, nous allons changer  $j$  en  $-j$ , et bien sûr prendre le processus  $Z$  au lieu de  $Z_H$ .

Cependant, cette modification ne permet de localiser les nouveaux  $Y_{j,k}$  qu'en 0. En effet:

$$\frac{2^j}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(2^j ks) \widehat{\psi}(2^j s) Z(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(ku) \widehat{\psi}(u) Z(2^{-j}u) du \quad (3.26)$$

Par conséquent, pour localiser autour d'un point  $t$  arbitrairement, il s'agira de translater.

Finalement, les  $Y_{j,k}$  sont modifiées et deviennent les variables symétriques  $\alpha$ -stables  $Z_{j,k}^{(t)}$  définies (pour  $t$  arbitrairement fixé) par

$$Z_{j,k}^{(t)} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \Re e(\widehat{\psi}_{-j,k}(s-t)) Z(s) ds. \quad (3.27)$$

Ainsi, par changement de variable nous avons l'approximation

$$\begin{aligned} Z_{j,k}^{(t)} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(ku) \widehat{\psi}(u) Z(2^{-j}u + t) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(ku) \widehat{\psi}(u) X(2^{-j}u + t, H(2^{-j}u + t)) du \\ &\approx \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(ku) \widehat{\psi}(u) \textcolor{blue}{X}(2^{-j}u + t, H(t)) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \Re e(\widehat{\psi}_{-j,k}(s-t)) \textcolor{blue}{X}(s, H(t)) ds := \textcolor{red}{X}_{j,k}^{(t)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La variable  $X_{j,k}^{(t)}$  apparue est issue du PFSH  $\{X(s, H(t)), s \in \mathbb{R}\}$ . Dans un premier temps, nous avons étendu à tout  $t$  arbitrairement fixé, les résultats pour un PFSH quelconque au PFSH  $\{X(s, H(t)), s \in \mathbb{R}\}$ .

Nous avons alors adapté les variables aléatoires  $\widehat{\alpha}_{n,\log_2}^{-1}$ ,  $H_{n,\log_2}$ ,  $D_{1,n,\log_2}$  et  $D_{2,n,\log_2}$ . Les sommes devenant dépendantes de  $j \in \mathbb{N}^*$ , nous remplaçons  $n$  par une suite  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  d'entiers naturels non nuls croissante et divergente vers  $+\infty$ . Et, nous définissons pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\alpha_j^{-1}(t) = \frac{1}{n_j} \sum_{p=1}^{n_j} (\log_2 |X_{j+1,2p-1}^{(t)}| - \log_2 |X_{j,4p-1}^{(t)}|), \quad (3.29)$$

$$H_j(t) = \frac{1}{n_j} \sum_{p=1}^{n_j} (\log_2 |X_{j,2p-1}^{(t)}| - \log_2 |X_{j+1,2p-1}^{(t)}|), \quad (3.30)$$

$$D_j^{(\alpha)}(t) = G(2^{-1} \vee \alpha_j^{-1}(t)) n_j^{1/2} (\alpha_j^{-1}(t) - \alpha^{-1}), \quad (3.31)$$

et

$$D_j^{(H)}(t) = G(2^{-1} \vee \alpha_j^{-1}(t)) n_j^{1/2} (H_j(t) - H(t)). \quad (3.32)$$

En généralisant les démonstrations des deux théorèmes mentionnés de l'article Ayache (2024, EJS), nous avons obtenu les Propositions 1 et 2 suivantes, en obtenant de surcroît des vitesses de convergence des estimateurs.

## Proposition 1

Fixons arbitrairement  $t \in [0, 1]$ . On suppose connue une trajectoire du PFSH  $\{X(s, H(t)), s \in \mathbb{R}\}$  sur  $[0, 1]$ . Alors,  $(\alpha_j^{-1}(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  est un estimateur statistique consistant  $\alpha^{-1}$  à partir du PFSH  $\{X(s, H(t)), s \in \mathbb{R}\}$ , et nous avons la vitesse

$$n_j^{\theta/2} |\alpha_j^{-1}(t) - \alpha^{-1}| \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0, \text{ pour tout } \theta \in [0, 1[, \quad (3.33)$$

De plus,  $(\alpha_j^{-1}(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  devient fortement consistant dès que la série  $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} n_j^{\theta_0-1}$  converge pour un certain  $\theta_0 \in [0, 1[$ . Dans ce cas, on a

$$n_j^{\theta_0/2} |\alpha_j^{-1}(t) - \alpha^{-1}| \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{p.s.} 0. \quad (3.34)$$

Enfin, quel que soit le mode rencontré de convergence,  $(\alpha_j^{-1}(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  est asymptotiquement normal:

$$D_j^{(\alpha)}(t) \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.35)$$

## Proposition 2

Fixons un point  $t \in [0, 1]$ . Supposons que l'on connaisse une trajectoire du PFSH  $X(s, H(t)), s \in \mathbb{R}$  sur  $[0, 1]$ . Alors  $(H_j(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  est un estimateur statistique de  $H(t)$  issue du PFSH  $\{X(s, H(t)), s \in \mathbb{R}\}$ . Et, nous avons la vitesse analogue pour  $H_j(t)$ :

$$n_j^{\theta/2} |H_j(t) - H(t)| \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0, \text{ pour tout } \theta \in [0, 1[, \quad (3.36)$$

et  $(H_j(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  devient fortement consistant, s'il existe  $\theta_0 \in [0, 1)$  tel que la série  $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} n_j^{\theta_0-1}$  converge. De plus, pour ce  $\theta_0$ , nous obtenons la vitesse

$$n_j^{\theta_0/2} |H_j(t) - H(t)| \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \quad (3.37)$$

Enfin, quel que soit le mode de convergence,  $(H_j(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  est asymptotiquement normal:

$$D_j^{(H)}(t) \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.38)$$

## Remarque 1

*Les démonstrations des deux propositions précédentes s'appuient sur des théorèmes classiques tels que le théorème de la limite centrale et la loi des grands nombres (Lindeberg), ainsi que sur des propriétés d'indépendance et des résultats relatifs à la loi de la suite  $(X_{j,k}^{(t)})_{j,k \in \mathbb{N}^*}$  (héritées de celles des  $Y_j, k$ )*

## Lemme 2

*Pour tous  $j \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, 1]$  arbitrairement fixés, nous avons les propriétés suivantes.*

- (i)  $(X_{j,k}^{(t)})_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- (ii) Les deux suites de variables aléatoires  $(X_{j+1,2p-1}^{(t)})_{p \in \mathbb{N}^*}$  et  $(X_{j,2p-1}^{(t)})_{p \in \mathbb{N}^*}$  sont indépendantes.
- (iii) Les deux suites  $(X_{j,k}^{(t)})_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $(2^{-(j-1)H(t)} X_{1,k}^{(t)})_{k \in \mathbb{N}^*}$  ont la même loi (au sens des lois fini-dimensionnelles).

Par analogie, on pose pour tous  $j, k \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, 1]$ :

$$\tilde{\alpha}_j^{-1}(t) = \frac{1}{n_j} \sum_{p=1}^{n_j} (\log_2(|Z_{j+1,2p-1}^{(t)}| + 2^{-(j+1)}) - \log_2(|Z_{j,4p-1}^{(t)}| + 2^{-j})), \quad (3.39)$$

$$\tilde{H}_j(t) = \frac{1}{n_j} \sum_{p=1}^{n_j} (\log_2(|Z_{j,2p-1}^{(t)}| + 2^{-j}) - \log_2(|Z_{j+1,2p-1}^{(t)}| + 2^{-(j+1)})), \quad (3.40)$$

$$\tilde{D}_j^{(\alpha)}(t) = G(2^{-1} \vee \tilde{\alpha}_j^{-1}(t)) n_j^{1/2} (\tilde{\alpha}_j^{-1}(t) - \alpha^{-1}), \quad (3.41)$$

$$\tilde{D}_j^{(H)}(t) = G(2^{-1} \vee \tilde{\alpha}_j^{-1}(t)) n_j^{1/2} (\tilde{H}_j(t) - H(t)). \quad (3.42)$$

Les propriétés d'indépendances pour  $(X_{j,k}^{(t)})_{j,k \in \mathbb{N}^*}$  ne sont plus valides pour la suite  $(Z_{j,k}^{(t)})_{j,k \in \mathbb{N}^*}$ .

Pour obtenir les prochains théorèmes qui sont les principaux résultats de notre travail, nous avons fait usage de l'inégalité triangulaire,

$$|\tilde{\alpha}_j^{-1}(t) - \alpha^{-1}| \leq |\tilde{\alpha}_j^{-1}(t) - \alpha_j^{-1}(t)| + |\alpha_j^{-1}(t) - \alpha^{-1}|, \quad (3.43)$$

et

$$|\tilde{H}_j(t) - H(t)| \leq |\tilde{H}_j(t) - H_j(t)| + |H_j(t) - H(t)|. \quad (3.44)$$

Les majeures difficultés ont été à ce stade de prouver que les distances  $|\tilde{\alpha}_j^{-1}(t) - \alpha_j^{-1}(t)|$  et  $|\tilde{H}_j(t) - H_j(t)|$  tendent vers 0, puis de déterminer les modes et vitesses de convergences vers 0 de ces distances. Puis l'on a fait usage des Propositions 1 et 2 pour conclure.

## Théorème 4 (Première partie)

*Supposons connue une trajectoire de  $Z$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .*

*(a) Supposons la condition suivante*

$$n_j = \mathcal{O}(2^{\varphi(j)}), \text{ lorsque } j \text{ tend vers } +\infty, \quad (3.45)$$

*où  $(\varphi(j))_{j \in \mathbb{N}^*}$  désigne une suite de réels positifs croissante divergente vers  $+\infty$  et vérifiant*

$$\varphi(j) = o(j), \text{ quand } j \text{ tend vers } +\infty. \quad (3.46)$$

*Alors, pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a les vitesses, pour tout  $\theta \in [0, 1[$ ,*

$$n_j^{\theta/2} |\tilde{\alpha}_j^{-1}(t) - \alpha^{-1}| \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0, \text{ et } n_j^{\theta/2} |\tilde{H}_j(t) - H(t)| \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0. \quad (3.47)$$

*Par conséquent,  $(\tilde{\alpha}_j^{-1}(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\tilde{H}_j(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  sont des estimateurs statistiques consistants respectivement de  $\alpha^{-1}$  et  $H(t)$ .*

## Théorème 5 (Seconde partie)

(b) De plus, sous la même condition (1.3), s'il existe  $\theta_0 \in [0, 1[$  tel que la série  $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} n_j^{\theta_0 - 1}$  converge, alors pour chaque  $t \in [0, 1]$ , les deux estimateurs statistiques

$(\tilde{\alpha}_j^{-1}(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\tilde{H}_j(t))_{j \in \mathbb{N}^*}$  sont fortement consistants.

Cela signifie que pour chaque  $t \in [0, 1]$ , les convergences dans (3.47) deviennent presque sûres sur un événement  $\Omega_\alpha(t)$  de probabilité 1, et on a les vitesses:

$$n_j^{\theta_0/2} |\tilde{\alpha}_j^{-1}(t) - \alpha^{-1}| \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{p.s.} 0, \text{ et } n_j^{\theta_0/2} |\tilde{H}_j(t) - H(t)| \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{p.s.} 0. \quad (3.48)$$

## Théorème 6

Supposons connue une trajectoire de  $Z$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Si la condition (3.45) est vérifiée par la suite  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$ , les deux estimateurs statistiques sont asymptotiquement normaux:

$$\tilde{D}_j^{(\alpha)}(t) \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1), \text{ et } \tilde{D}_j^{(H)}(t) \xrightarrow[j \rightarrow +\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.49)$$

# Organisation de l'intervention

- 1 Du brownien fractionnaire au multifractionnaire stable harmonisable
- 2 Stratégies d'estimation dans les cadres du PFSL et du PFSH
- 3 Adaptation de la stratégie au cadre multifractionnaire stable harmonisable
- 4 Perspective d'amélioration en vue de simulations

- Utilisation de trajectoires discrétisées de  $Z$ .** L'approche que l'on a faite présuppose la connaissance d'une trajectoire de  $Z$  sur  $[0, 1]$  entièrement. Les données observées sont souvent discrétisées en raison des limites pratiques des expériences ou des observations numériques. Les intégrales définissant les  $Z_{j,k}^{(t)}$  seront alors discrétisées, et donc il faudra construire nos estimateurs statistiques à partir de ces nouveaux  $Z_{j,k}^{(t,n)}$ . Signalons que nous avons établi durant notre travail un lemme intermédiaire allant dans le sens de ce troisième objectif.

### Lemme 3

Considérons, pour tous  $j, k \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, 1]$ :

$$Z_{j,k}^{(t,n)} := \frac{2^j}{\pi} \sum_{|m| \leq 4^n} Z(d_{n,m}) \int_{d_{n,m}}^{d_{n,m+1}} \cos(2^j k(s-t)) \widehat{\psi}(2^j(s-t)) ds, \quad (4.50)$$

où pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $d_{n,m} = 2^{-n}m$ . Alors sur un évènement universel presque sûr  $\Omega_\alpha^*$ , pour tous  $j, k \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, 1]$ , nous avons

$$Z_{j,k}^{(t,n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} Z_{j,k}^{(t)}. \quad (4.51)$$

## Merci pour votre attention.

### Références:

- A. Ayache. *Harmonizable fractional stable motion : Asymptotically normal estimators for both parameters*, Electronic Journal of Statistics, 18(2):4459–4498, 2024.
- A., Ayache, Multifractional Stochastic Fields: Wavelet Strategies In Multifractional Frameworks, World Scientific (2019)
- A. Ayache, F. Bouly, *Uniformly and strongly consistent estimation for the random Hurst function of a multifractional process*, ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 20, 1587–1614 (2023)
- A. Ayache and J. Hamonier. *Linear multifractional stable motion: wavelet estimation of  $H(\cdot)$  and  $\alpha$  parameters*, Lithuanian Mathematical Journal, 55(2):159–192, 2015.
- A. Ayache and J. Hamonier. *Uniformly and strongly consistent estimation for the Hurst function of a Linear Multifractional Stable Motion*, Bernoulli, 23(2):1365–1407, 2017.
- A. Ayache; S. Jaffard; M. S. Taqqu, *Wavelet construction of Generalized Multifractional processes*, Revista Matemática Iberoamericana (2007), Volume: 23, Issue: 1, page 327-370, ISSN: 0213-2230
- A., Ayache, C., Louckx, *Harmonizable Multifractional Stable Field: Sharp results on sample path behavior*, Stochastic Processes and their Applications, Volume 186, August 2025, 104638
- J.M. Bardet and D. Surgailis. *Nonparametric estimation of the local Hurst function of multifractional processes*, Stochastic Processes and their Applications, 123(3):1004–1045, 2013.
- S., Cambanis, C.D., Hardin, Jr., A. Weron, *Ergodic Properties of Stationary Stable Processes*, Stochastic Processes and their Applications, 24 (198) p. 1-18, 1987
- Bianchi, S., Pianese, A., *Multifractional processes in finance*. Risk and Decision Analysis, 5(1), 1-22. <https://doi.org/10.3233/RDA-130097> (Original work published 2014)
- T. Dang. *Estimation of the multifractional function and the stability index of linear multifractional stable processes*, ESAIM: Probability and Statistics, 24:1–20, 2020.
- G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinitive variance*, Chapman and Hall, 1994.
- S. Stoev and M.S. Taqqu, *Path properties of the linear multifractional stable motion*, Fractals, 13(2):157–178, 2005.