① Relèvement du mouvement brownien.

Introduction : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un esp. proba.

Le but de cet exposé est de définir le relèvement du mouvement brownien et de présenter ses propriétés qui sont similaires à celles du mouvement brownien, mais ce relèvement est à valeurs dans $G^2(\mathbb{R}^d)$.

Nous verrons notamment la régularité des trajectoires, nommés chemins rugueux du brownien, ainsi que des théorèmes limites type "Donsker".

Notations et propriétés utiles :

Soit (E,d) métrique. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bijective croissante

Si $x : [0,T] \to E$, alors x est :

(i) φ-Hölder si :

$$|x|_{\varphi\text{-Höl},[0,T]} := \sup_{\substack{t\neq s \\ t,s\in[0,T]}} \frac{d(x_s,x_t)}{\varphi(|t-s|)} < +\infty,$$

(ii) à φ-Variations finies si :

$$|x|_{\varphi\text{-Var},[0,T]} := \varphi^{-1}\left[\sup_{(t_i)_i\in\mathcal{D}[0,T]} \sum_i \varphi\left(d\left(x_{t_i},x_{t_{i+1}}\right)\right)\right] < +\infty$$

Propriétés :

- Si $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha>0$ on retrouve les fonctions α-Hölder et à α-Variations finies.
- φ-Hölder $\Rightarrow$ φ^{-1}-Variat° finies.

(Donc α-Hölder $\Rightarrow$ $\frac{1}{\alpha}$-Variat° finies).

Réciproques fausses (x peut être à p-variat° finies sans être continue)

- $\mathcal{C}^{\alpha\text{-Höl}}([0,T],E)$
$= \{x : [0,T] \to E, \sup_{t\neq s\in[0,T]} d(x(s),x(t)) < +\infty\}$
- $\mathcal{C}^{\varphi\text{-Höl}}([0,T],E) = \{x, |x|_{\varphi\text{-Höl}[0,T]} < +\infty\}$.
- $\mathcal{C}^{\varphi\text{-Var}}([0,T],E) = \{x \text{ cic}, |x|_{\varphi\text{-Var},[0,T]} < +\infty\}$.

(I) Aires de Levy :

Définition 1 : (Aire de Levy) :

Soit $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ un mouvt brownien d dimensionnel pour $d\geq 1$, on définit son aire de Levy sur $[0,T]$

$A = (A^{(i,j)})_{i,j\in\{1,\dots,d\}}$ comme le processus continu tel que pour tous $i,j\in\{1,\dots,d\}$ et $t\in[0,T]$

$$A_t^{(i,j)} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[B_s^{(i)}\, dB_s^{(j)} - B_s^{(j)}\, dB_s^{(i)}\right] \quad (1)$$

On définit aussi l'accroissement d'aire de Levy pour tous $0\leq s<t\leq T$ par (pour tous $i,j\in\{1,\dots,d\}$) :

$$A_{s,t}^{(i,j)} = A_t^{(i,j)} - A_s^{(i,j)} - \frac{1}{2}\left[B_s^{(i)} B_{s,t}^{(j)} - B_s^{(j)} B_{s,t}^{(i)}\right] \quad (2)$$

où $B_{s,t}^{(k)} := B_t^{(k)} - B_s^{(k)}$, pour tout $k\in\{1,\dots,d\}$.

Remarques :

- En fait $A_{0,t}^{(k)} = A_t^{(k)}$ et pour $0\leq s<t\leq T$: $A_{s,t} \in [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]$ (l'espace des matrices de dimension $d\times d$ anti-symétriques.
- Nous avons (exercice) :

$$A_{s,t}^{(i,j)} = \frac{1}{2}\int_s^t \left[B_{s,r}^{(i)}\, dB_r^{(j)} - B_{s,r}^{(j)}\, dB_r^{(i)}\right] \quad (3)$$

- Rappelons que l'intégrale d'Itô est limite à gauche de ses sommes de Riemann-Stieltjès, et cette limite est uniforme sur tout compact de $[0,T]$.

Etant donnée une subdivision $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,T]$ telle que $|\mathcal{D}_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^T B_s^{(i)}\, dB_s^{(j)} - \sum_{s_k\in\mathcal{D}_n} B_{s_k\wedge t}^{(i)}\left(B_{s_{k+1}\wedge t}^{(j)} - B_{s_k\wedge t}^{(j)}\right)\right|^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad (4)$$

pour tous $i\neq j\in\{1,\dots,d\}$.

Comme la limite uniforme de fonctions continues est continue, alors (4) implique que A_t admet une modification continue (en t) presque sûrement.

- Grâce à (4) et la définition (1) de A_t, et des propriétés du brownien, on déduit

$\forall \lambda>0$, $\{A_{\lambda t}, t\geq 0\} \underset{\mathcal{L}\leftarrow \text{de processus}}{=} \{\lambda A_t, t\geq 0\}$

$\forall\, 0\leq s<t\leq T$:

$$A_{s,t} \underset{\mathcal{L}}{=} A_{0,s-t}.$$

② On va montrer que A_t est exponentiellement intégrable, pour tout $t \in [0,T]$.

<u>Lemme 2:</u> Soit B un brownien d-dimensionnel. Alors pour tout $\eta < \frac{1}{2}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\eta}{T}|B|^2_{\infty,[0,T]}\right)\right] < +\infty$$

$$\left(|B|_{\infty,[0,T]} = \sup_{t\in[0,T]} |B_t| \leftarrow \text{norme de } \mathbb{R}^d\right)$$

<u>Preuve</u> : Le pb se pose pour $0 < \eta < \frac{1}{2}$.
Considérons $T=1$, $d=1$ ($B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$ sont ⫫ ...)
Grâce au th. de Tonelli, la symétrie de B, et le principe de réflexion,

$$\mathbb{E}\left[\exp \eta |B|^2_{\infty,[0,1]}\right] = \int_0^{+\infty} e^{\eta x^2}\,\mathbb{P}(|B|_\infty \geq x)\,dx$$

$$\leq 2\int_0^{+\infty} e^{\eta x^2}\,\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq 1} B_t \geq x\right]dx$$

$$\leq 4\int_0^{+\infty} e^{\eta x^2}\,\mathbb{P}(B_1 \geq x)\,dx$$

$$\underset{B_1 \sim \mathcal{N}(0,1)}{\leq} 4\int_0^{+\infty} e^{(\eta-\frac{1}{2})x^2}\,dx < +\infty.$$

si $\eta < \frac{1}{2}$. ■

<u>Proposition 3</u> : Soit B un brownien d-dimensionnel, et soit A son aire de Levy, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $0 \leq s < t \leq T$:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\eta\,\frac{\|A_{s,t}\|_{\mathbb{R}^d}}{|t-s|}\right)\right] < +\infty.$$

<u>Preuve</u> : Par changement d'échelle, on peut se ramener à une variable t, puis à $t=1$. En effet :

$A_{s,t} \underset{\mathcal{L}}{=} A_{0,t-s} \underset{\mathcal{L}}{=} (t-s)A_{0,1}$ donc $\frac{A_{s,t}}{t-s} \overset{\mathcal{L}}{=} A_{0,1}$. Donc il suffit de montrer que $A_{0,1} = A_1$ est exponentiellement intégrable.

Au vu de la définition 1, il suffit de montrer que $\int_0^1 B_s^{(i)}\,dB_s^{(j)}$ est exp. intégrable, pour tous $i \neq j$ dans $\{1,\dots,d\}$.

La loi conditionnelle de $Z = \int_0^1 B_s^{(i)}\,dB_s^{(j)}$ par rapport à $B^{(i)}$, par l'isométrie de l'intégrale d'Itô, est :

$$\mathcal{N}\left(0, \int_0^1 (B_s^{(i)})^2\,ds\right).$$

Il s'en suit que, conditionnellement à $\mathcal{F}_{B^{(i)}} = \sigma\{B_s^{(i)}, s\in[0,1]\}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\eta\left|\int_0^1 B_s^{(i)}\,dB_s^{(j)}\right|}\,\Big|\,\mathcal{F}_{B^{(i)}}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{\eta|Z|}\,\Big|\,\mathcal{F}_{B^{(i)}}\right] \leq 2\,\mathbb{E}\left[e^{\eta Z}\,\Big|\,\mathcal{F}_{B^{(i)}}\right]$$

$$\underset{\text{Laplace}}{=} 2\exp\left[\frac{\eta^2}{2}\int_0^1 (B_s^{(i)})^2\,ds\right]$$

$$\leq 2\exp\left(\frac{\eta^2}{2}|B^{(i)}|^2_{\infty,[0,1]}\right).$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[e^{\eta\left|\int_0^1 B_s^{(i)}\,dB_s^{(j)}\right|}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{\eta|Z|}\,\big|\,\mathcal{F}_{B^{(i)}}\right)\right]$$

$$\leq 2\,\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\eta^2}{2}|B^{(i)}|^2_{\infty,[0,1]}\right)\right) < +\infty$$

pour $\eta < \frac{1}{2}$ (Lemme 2). ■

<u>Proposition 4</u> (admise) :

Si $\mathcal{D}_n = \{mT2^{-n}, m = 0,\dots,2^n\}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors si l'on note : $t_m = mT2^{-n}$ et

$$\begin{cases} B_s^{(k,n)} = \sum_{m=0}^{2^n-1} B_{t_m}^{(k)}\,\mathbb{1}_{[t_m, t_{m+1})}(s) & k\in\{1,\dots,d\},\ t\in[0,T], \\ A_{n,T}^{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(\int_0^T \left[B_s^{(i,n)}\,dB_s^{(j,n)} - B_s^{(j,n)}\,dB_s^{(i,n)}\right]\right) \end{cases}$$

alors :

$(A_{n,T}^{(i,j)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\mathcal{G}_n = \sigma\left\{B_{t_m}^{(i)}, B_{t_m}^{(j)}, m \in \{0,\dots,2^n\}\right\}$$

qui converge vers A_T dans $L^2(\mathbb{P})$.

<u>Proposition 5</u> : Soit B un brownien d-dimensionnel. Fixons $i \neq j$ dans $\{1,\dots,d\}$.

Soit $a_{i,j}(t) := \frac{1}{4}\int_0^t \left[(B_s^{(i)})^2 + (B_s^{(j)})^2\right]ds$,

et $a_{i,j}^{-1}$ la fonction réciproque de la bijection croissante $a_{i,j}$ $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Alors $\left\{A^{(i,j)}_{a_{i,j}^{-1}(u)}, u \geq 0\right\}$ est un mouvement brownien indépendant du processus $\left\{(B_s^{(i)})^2 + (B_s^{(j)})^2, s \geq 0\right\}$ et donc est indépendant du processus $\{\|B_s\|, s\geq 0\}$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.

<u>Preuve:</u> Notons $r_t = \sqrt{(B_t^{(i)})^2 + (B_t^{(j)})^2}$ pour tout $t \geq 0$.

Soit

$$\gamma_t = \int_0^t \frac{B_s^{(i)}}{r_s} dB_s^{(i)} + \int_0^t \frac{B_s^{(j)}}{r_s} dB_s^{(j)}.$$

Par la formule d'Itô :

$$\int_0^t r_s d\gamma_s = \int_0^t \left[r_s \frac{B_s^{(i)}}{r_s} dB_s^{(i)} + r_s \frac{B_s^{(j)}}{r_s} dB_s^{(j)} \right]$$

$$= \frac{(B_s^{(i)})^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{(B_s^{(j)})^2}{2} - \frac{t}{2} = \frac{r_t^2}{2} - t$$

Donc :

$$\frac{r_t^2}{2} = \int_0^t r_s d\gamma_s + t. \quad (5)$$

Le système de martingales $(A^{(i,j)}, \gamma)$ vérifie

$$\langle \gamma \rangle_t = \int_0^t \left[\frac{(B_s^{(i)})^2}{r_s^2} + \frac{(B_s^{(j)})^2}{r_s^2} \right] ds = \int_0^t ds = t.$$

$$\langle \gamma, A^{(i,j)} \rangle_t = 0$$

$$\langle A^{(i,j)} \rangle_t = \frac{1}{4} \int_0^t \left[(B_s^{(i)})^2 + (B_s^{(j)})^2 \right] ds$$

$$= a_{i,j}(t).$$

Considérons $\tilde{\gamma}_t = A^{(i,j)}_{a^{-1}_{i,j}(t)}$. Alors

$$\langle \gamma, \tilde{\gamma} \rangle_t = \langle \gamma, A^{(i,j)}_{a^{-1}_{i,j}(t)} \rangle = 0$$

$$\langle \tilde{\gamma} \rangle_t = \frac{1}{4} \int_0^{a^{-1}_{i,j}(t)} \left[(B_s^{(i)})^2 + (B_s^{(j)})^2 \right] ds$$

$$= a_{i,j}\left(a^{-1}_{i,j}(t)\right) = t.$$

Gr : <u>Théorème 6</u> (Caractérisation de Lévy du Brownien multidimensionnel) :
Soit $X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(N)})$ une martingale locale N-dimensionnelle avec $X_0 = 0$.
LASSE :
(1) X est un brownien N-dimensionnel pour sa filtration.
(2) X a ses covariations quadratiques qui vérifient :

$$\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_t = \delta_{i,j}\, t \quad \begin{cases} \forall t \geq 0 \\ \forall 1 \leq i,j \leq N. \end{cases}$$

Donc γ et $\tilde{\gamma}$ sont deux browniens indépendants. D'après (1) : $(r_t)_{t \geq 0}$ est l'unique solution de l'EDS par rapport au brownien γ : $r_t = r_t d\gamma_t + dt$.
En particulier, $\sigma\{r_s, 0 \leq s \leq t\} \subset \sigma\{\gamma_s, 0 \leq s \leq t\}$ donc $\tilde{\gamma} \perp r$ et donc comme $A^{(i,j)} = \tilde{\gamma}_{a_{i,j}(t)}$ alors $A^{(i,j)}_{a^{-1}_{i,j}(t)} = \tilde{\gamma}_t$ est un brownien indépendant de r. $\blacksquare$

Si $p > 2$, et si $x \in \mathcal{C}^{p\text{-Var}}([0,T], \mathbb{R}^d)$, avec $x_0 = 0$, alors la signature (nommée Lyons lift) se construit de manière analogue avec les intégrales de Young (et non plus des intégrales de Riemann Stieltjes).
Avec $N = 2$, nous allons faire apparaître les expressions des fameuses aires.

Notons $S_2(x)$ la signature de x.

$$\log_2(S_2(x)_{0,t}) = \log_2\left(1 + (S_2(x)_{0,t} - 1)\right)$$

$$= (S_2(x)_{0,t} - 1) - \frac{1}{2}(S_2(x)_{0,t} - 1)^{\otimes 2}$$

$$= \int_0^t dx_u + \int_{\{0<u<v<t\}} dx_u \otimes dx_v$$

$$- \frac{1}{2}\left[\int_0^t dx_u + \int_{\{0<u<v<t\}} dx_u \otimes dx_v\right]^{\otimes 2}$$

$$= x_t + \int_0^t \left(\int_0^v dx_u\right) \otimes dx_v - \frac{1}{2} x_t \otimes x_t$$

$$= x_t + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_0^v dx_u\right) \otimes dx_v$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\int_0^t \left(\int_0^v dx_u\right) \otimes dx_v - x_t \otimes x_t\right]$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} x_t + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_0^v dx_u\right) \otimes dx_v$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_0^u dx_v\right) \otimes dx_u \quad (6)$$

$$= x_t + a_t \quad \text{où}$$

$$a_t = \frac{1}{2}\left[\int_0^t dx_u \otimes dx_v - \int_0^t dx_v \otimes dx_u\right]$$

Ainsi $S_2(x)_{0,t} = \exp(x_t + a_t) \in G^2(\mathbb{R}^d)$

(II) <u>Mouvement brownien relevé :</u>

<u>Définition 7</u> : Soit B un brownien d-dimensionnel, et soit A son aire de Lévy. Le processus continue à valeurs dans $G^2(\mathbb{R}^d)$ appelé $\mathbb{B}$, défini par

$$\mathbb{B}_t = \exp(B_t + A_t), \quad t \geq 0.$$

(4) est appelé mouvement brownien relevé. Les trajectoires de $\mathbb{B}$ sont nommées chemins rugueux browniens (ces 2 dénominat° seront justifiées par leurs propriétés).

Remarques: • Evidemment $\pi_1(\mathbb{B}_t) = B_t$.

• En fait, nous avons :

$$\mathbb{B}_t = \Big(1, B_t, \underbrace{\int_0^t B\otimes \circ dB}_{\text{intégrale de Stratonovic (plus Itô)}}\Big)$$

pour qu'il y ait le calcul (6) valable pour B et donc que pour tt $t \geq 0$:

$$\mathbb{B}_t = \exp(B_t + A_t) \in G^2(\mathbb{R}^d).$$

Notation :

Nous notons $\mathbb{B}_{s,t} = \mathbb{B}_s^{-1} \otimes \mathbb{B}_t \in G^2(\mathbb{R}^d)$.

Observons que cette formule est cohérente avec

$$\mathbb{B}_{s,t} = \exp[B_{s,t} + A_{s,t}].$$

($B^{(i)}_{s,t} = B^{(i)}_t - B^{(i)}_s$ et

$$A^{(i,j)}_{s,t} = \frac{1}{2}\left(\int_0^t \left(B^{(i)}_{s,r} dB^{(j)}_r - B^{(j)}_{s,r} dB^{(i)}_r\right)\right) \quad \mathbb{P}\text{-ps}$$

(Car comme dans la Prop 4 $A^{(i,j)}_{s,t}$ est une limite dans $L^2(\mathbb{P})$).

Proposition 8 : $(\mathbb{B}_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs dans $G^2(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie :

(i) $\mathbb{B}_0(\omega) = 1$, $\forall \omega \in \Omega$.

(ii) $t \mapsto \mathbb{B}_t(\omega)$ est continue pour tout $\omega \in \Omega$.

(iii) Pour tous $t, h \geq 0$, $\mathbb{B}_{t,t+h} = \mathbb{B}_t^{-1} \otimes \mathbb{B}_{t+h}$ est indépendant de $\sigma\{\mathbb{B}_u, 0 \leq u \leq t\}$

(iv) Accroissements stationnaires :

$$\{\mathbb{B}_{s,s+t}, t \geq 0\} \overset{\mathcal{L}}{=} \{\mathbb{B}_t, t \geq 0\}$$ pour tout $s \geq 0$.

(v) Autosimilarité "$G^2(\mathbb{R}^d)$" :

Pour tout $\lambda > 0$:

$$\{\mathbb{B}_{\lambda t}, t \geq 0\} \overset{\mathcal{L}}{=} \{\delta_{\sqrt{\lambda}} \mathbb{B}_t ; t \geq 0\}$$ où

δ_λ est l'opérateur de dilatation de paramètre λ dans $G^2(\mathbb{R}^d)$

$$\left(\delta_\lambda : T^2(\mathbb{R}^d) \to T^2(\mathbb{R}^d),\ (x, y, z) \mapsto (x, \lambda y, \lambda^2 z)\right).$$

Preuve : (i), (ii) sont triviaux au vu des propriétés de $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(A_t)_{t \geq 0}$.

(iii) Comme A_r est mesurable pour la tribu $\sigma\{B_u, 0 \leq u \leq r\}$ donc

$$\sigma\{\mathbb{B}_r, 0 \leq r \leq s\} = \sigma\{B_r, A_r, 0 \leq r \leq s\}$$

D'autre part, à $s \geq 0$ fixé :

$\{B_{s,s+t}, A_{s,s+t}, t \geq 0\}$ est déterminée par la tribu

$$\sigma\{B_{s,r}, r \geq s\} = \sigma\{B_{s,s+t}, t \geq 0\},$$ et comme $\sigma\{B_r, 0 \leq r \leq s\} \perp\!\!\!\perp \sigma\{B_{s,s+t}, t \geq 0\}$, on a le résultat

(iv) On a pour tout $s \geq 0$:

$$\{B_{s,s+t}, t \geq 0\} \overset{\mathcal{L}}{=} \{B_t, t \geq 0\} \quad (7)$$

Donc, pour tout $s \geq 0$ fixé et $i, j \in \{1, \dots, d\}$

$$\{A^{(i,j)}_{s,s+t}, t \geq 0\}$$
$$= \left\{\frac{1}{2}\int_s^{s+t} [B^{(i)}_{s,r} dB^{(j)}_r - B^{(j)}_{s,r} dB^{(i)}_r], t \geq 0\right\}$$
$$\overset{\mathcal{L}}{=} \left\{\frac{1}{2}\int_s^{s+t} [B^{(i)}_{s,r} dB^{(j)}_{s,r} - B^{(j)}_{s,r} dB^{(i)}_{s,r}], t \geq 0\right\}$$
$$\overset{\mathcal{L}}{=} \left\{\frac{1}{2}\int_0^{t} [B^{(i)}_{r} dB^{(j)}_{r} - B^{(j)}_{r} dB^{(i)}_{r}], t \geq 0\right\}$$

et le même calcul donne :

$$\{(B_{s,t} ; A_{s,s+t}), t \geq 0\} \overset{\mathcal{L}}{=} \{(B_t, A_t), t \geq 0\}$$

(v) On a :

$$\{B_{\lambda^2 t}, t \geq 0\} \overset{\mathcal{L}}{=} \{\lambda B_t, t \geq 0\}.$$

D'après (4), A est déterminée comme une limite de polynômes homogènes de degré 2 en termes d'accroissements de browniens $B^{(i)}_{s_k \wedge t}\left(B^{(j)}_{s_{k+1}\wedge t} - B^{(j)}_{s_k \wedge t}\right)$ où $(s_k)_{1 \leq k \leq m} \in \mathcal{D}[0,T]$. Alors, par accroissements indépendants :

$$\{(B_{\lambda^2 t}, A_{\lambda^2 t}), t \geq 0\} \overset{\mathcal{L}}{=} \{(\lambda B_t, \lambda^2 A_t), t \geq 0\}$$

On applique ensuite $\exp : \mathbb{R}^d \oplus [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d] \to G^2(\mathbb{R}^d)$ ■

Etudions à présent la régularité des trajectoires rugueuses du brownien.

D'abord, pourquoi a-t-on choisi $N=2$ et pas plus ?

5 En premier lieu, nous avons le module de continuité de Lévy pour le brownien.

$\forall T>0$, $\mathbb{P}$-ps :

$$\sup_{0\le s<t\le T} \frac{\|B_t - B_s\|_d}{\sqrt{(t-s)\log[(t-s)^{-1}]}} < +\infty.$$

Ainsi : $\exists \tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$ et $C>0$ finie sur $\tilde{\Omega}$ tel que sur $\tilde{\Omega}$: $\forall 0\le s<t\le T$

$$\|B_t - B_s\| \le C(t-s)^{1/2}\log[(t-s)^{-1}]$$
$$\le C\kappa_\varepsilon (t-s)^{1/2-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon>0 \text{ (où } \kappa_\varepsilon>0)$$

Donc : $(B_t)_{t\ge0} \in \mathcal{C}^{\alpha\text{-Höl}}([0,T], \mathbb{R}^d)$, $\forall \alpha \in]0;\frac{1}{2}[$

D'où $(B_t)_{t\ge0}$ est à $\frac{1}{\alpha}$-Variations finies $\forall \alpha \in]0;\frac{1}{2}[$.

En second lieu, on a en fait le théorème et la définition suivants :

<u>Théorème 9</u> : Soit $N \ge \lfloor p\rfloor \ge 1$ et soit $\underline{x} \in \mathcal{C}_0^{p\text{-Var}}([0,T], G^{\lfloor p\rfloor}(\mathbb{R}^d))$. Alors, il existe un unique p-relèvement de Lyons d'ordre N de $\underline{x}$. En le notant $S_N(\underline{x})$, on définit l'application S_N sur $\mathcal{C}_0^{p\text{-Var}}([0,T], G^{\lfloor p\rfloor}(\mathbb{R}^d))$.

Alors :

(i) $S_N : \mathcal{C}_0^{p\text{-Var}}([0,T], G^{\lfloor p\rfloor}(\mathbb{R}^d)) \to \mathcal{C}_0^{p\text{-Var}}([0,T], G^N(\mathbb{R}^d))$ est bijective.

(ii) $\exists C>0$ (dépendant de N et p) tel que $\forall 0\le s<t\le T$:

$$\|x\|_{p\text{-Var},[s,t]} \le \|S_N(x)\|_{p\text{-Var},[s,t]} \le C\|x\|_{p\text{-Var},[s,t]}$$

<u>Définition 10</u> : Soit $N \ge \lfloor p\rfloor \ge 1$ et soit $\underline{x} \in \mathcal{C}_0^{p\text{-Var}}([0,T], G^{\lfloor p\rfloor}(\mathbb{R}^d))$. Une trajectoire dans $\mathcal{C}_0^{p\text{-Var}}([0,T], G^N(\mathbb{R}^d))$ dont les projections sont celles de $\underline{x}$ est appelée un <u>p-relèvement de Lyons</u> de $\underline{x}$ d'ordre N.

Ainsi, choisir $N>2$ n'apporte pas d'information supplémentaire.

Comme $(B_t)_{t\ge0}$ est à p-Variations finies pour tout $p>2$, on peut choisir $p>2$ tel que $\lfloor p\rfloor = 2$ et donc $N=2$.

- - - - - - - - - - -

On va voir que le relèvement brownien $\mathbb{B}$ (à valeurs dans $G^2(\mathbb{R}^d)$) a en fait presque sûrement des trajectoires α-Hölder pour tout $0<\alpha<\frac{1}{2}$, et donc à $\frac{1}{\alpha}$-Variations finies, $\forall 0<\alpha<\frac{1}{2}$.

<u>Rappel</u> : $d(g,h) = \|g^{-1}\otimes h\|$, $\forall g,h \in G^2(\mathbb{R}^d)$.

métrique de Carnot-Carathéodory

On a alors :

$$d(\mathbb{B}_s, \mathbb{B}_t) = d[\exp(B_s + A_s); \exp(B_t + A_t)]$$
$$= \|\exp(B_{s,t} + A_{s,t})\|$$

← norme homogène

$$\sim \|B_{s,t}\|_d \vee \|A_{s,t}\|_{d^2}^{1/2},$$

et l'on a : $\|B_{s,t}\|_d \le C(\omega)|t-s|^\alpha$ uniformément en s, t sur un compact $[a,b]$ (pour simplifier $[0,1]$).

Pour atteindre notre résultat, il reste à prouver qu'il existe $\alpha \in]\frac{1}{3};\frac{1}{2}[$ tel que

$$\sup_{0\le s<t\le 1} \frac{\|A_{s,t}\|_{d^2}}{|t-s|^{2\alpha}} < +\infty, \ \mathbb{P}\text{-ps}.$$

<u>Remarque</u> : (i)

⚠ c'est différent de :

$$\sup_{0\le s<t\le 1} \frac{\|A_s - A_t\|_{d^2}}{|t-s|^{2\alpha}} < +\infty \quad \mathbb{P}\text{-ps}.$$

(ii) Nous avons en fait la α-Hölder régularité pour $0<\alpha<\frac{1}{2}$ de $t \mapsto A_t(\omega) \in [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]$ par une application immédiate d'une version généralisée du critère de Kolmogorov pour $\{A_t, t\ge0\}$ à valeurs dans $[\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d]$ et de la Proposition 5 : l'aire de Lévy est un brownien avec "horloge" aléatoire Lipschitzienne.

(iii) Mais attention ...

$$\|A_{s,t}\|_{d^2} = \|A_t - A_s - \tfrac{1}{2}[B_s, B_{s,t}]\|_{d^2}$$
$$\le \|A_t - A_s\|_{d^2} + \tfrac{1}{2}|B|_\infty \|B_{s,t}\|_d$$
$$\le C(\omega)|t-s|^\alpha$$

ce qui n'aboutit qu'à

$$\sup_{0\le s<t\le 1} \frac{\|A_{s,t}\|_{d^2}}{|t-s|^{2\alpha}} < +\infty \ \mathbb{P}\text{-ps},$$

mais donc pour $0<\alpha<\frac{1}{4}$!

<u>Théorème 11</u> : $\forall T>0$, $\exists \eta>0$,

$$\sup_{0\le s<t\le T} \mathbb{E}\left[\exp\left(\eta \frac{d^2(\mathbb{B}_s, \mathbb{B}_t)}{|t-s|}\right)\right] < +\infty$$

<u>Preuve</u> : D'après la Proposition 8 (v) (Autosimilarité) et $\mathbb{B}_{s,t} \overset{\mathcal{L}}{=} \delta_{(t-s)^{1/2}} \mathbb{B}_{0,1}$ donc :

$d^2(\mathbb{B}_s,\mathbb{B}_t) = \|\mathbb{B}_{s,t}\|^2 \overset{\mathcal{L}}{=} (t-s)\,\|\mathbb{B}_1\|^2$.

Ainsi il suffit de trouver $\eta>0$ petit tel que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\eta\|\mathbb{B}_1\|^2\right)\right] < +\infty,$$

et par équivalence des normes homogènes

$$\|\mathbb{B}_1\|^2 \sim \|B_1\|_d^2 + \|A_1\|_{d^2}$$

Grâce à la Proposition 3, et comme $B_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, on obtient le résultat. ■

Et nous avons le théorème suivant :

Théorème 12 : (Admis) :

Soit $\{X_t,\ t\in[0,T]\}$ un processus continue à valeurs dans un espace Polonais (E,d), qui vérifie la condition gaussienne d'intégrabilité suivante : il existe $p\geq 1$, $\eta>0$ tels que :

$$\sup_{0\le s<t\le T} \mathbb{E}\left[\exp\left(\eta\,\frac{d^2(X_s,X_t)}{(t-s)^{2/p}}\right)\right] < +\infty \quad (8)$$

Supposons que $\zeta : [0,+\infty[\ \to [0,+\infty[$ soit telle que $\zeta(0)=0$, ζ strictement croissante avec

$$\limsup_{h\to 0} \frac{h^{1/p}\log^{1/2}(h^{-1})}{\zeta(h)} < +\infty \quad (9).$$

Alors, il existe $c(p,T)>0$ tel que :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(c(p,T)\,\eta\,\|X\|^2_{\zeta\text{-Höl},[0,T]}\right)\right] < +\infty.$$

Corollaire 13 : Pour tout $T>0$ et tout $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, il existe $\eta>0$, $c(\alpha,T)$ tels que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(c(\alpha,T)\,\eta\,\|\mathbb{B}\|^2_{\alpha\text{-Höl},[0,T]}\right)\right] < +\infty. \quad (10)$$

Preuve : (8) est vérifié d'après le Thm 11, et avec $p=2$. En prenant $\zeta(h)=h^{\alpha}$, pour $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ on déduit (10) de (9) du thm 12. ■

Du corollaire 13, $\mathbb{B}$ est α-Hölder sur $[0,T]$ pour tt $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ et donc $\frac{1}{\alpha}$-Variation finies.

En réalité, $\mathbb{B}$ a exactement le même comportement asymptotique que B ...

Théorème 14 : (Variation exacte de $\mathbb{B}$) :

Soit $T>0$ et soit :

$$\psi(h) = \frac{h^2}{\ln^*\ln^*(h^{-1})} \quad \text{où}$$

$\ln^* = 1\vee \ln$. Alors, il existe $\eta>0$ tel que :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\eta}{T}\|\mathbb{B}\|^2_{\psi\text{-Var},[0,T]}\right)\right] < +\infty.$$

Donc $\|\mathbb{B}\|_{\psi\text{-Var},[0,T]}$, $\mathbb{P}$-ps.

Théorème 15 : (loi du log itéré) :

$\exists\, c>0$ tel que :

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{h\to 0^+} \frac{\|\mathbb{B}\|_{0,[0,h]}}{\sqrt{h\ln^*\ln^*(h^{-1})}} = c\right] = 1.$$

III Théorème limite :

Théorème 16 (Donsker pour $\mathbb{B}$)

Considérons une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ donnée par la somme partielle d'une suite de v.a $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d centrées telle que $\xi_i \overset{\mathcal{L}}{=} \xi$ $\forall i\in\mathbb{N}^*$, et ayant l'identité comme matrice de covariance : $\mathbb{E}(\xi\otimes\xi) = I$.

Soit pour tout $t\in[0,1]$,

$$W_t^{(n)} = n^{-\frac{1}{2}}\left(\xi_1+\dots+\xi_{\lfloor nt\rfloor} + (nt-\lfloor nt\rfloor)\,\xi_{\lfloor nt\rfloor+1}\right)$$

Si $\mathbb{E}(\|\xi\|_d^p)<+\infty$, $\forall p\geq 1$, et si $0<\alpha<\frac{1}{2}$, alors pour tt $t\in[0,1]$, (relation de Chen) -

$$S_2(W^{(n)})_t = \delta_{n^{-1/2}}\left(e^{\xi_1}\otimes\dots\otimes e^{\xi_{\lfloor nt\rfloor}}\otimes e^{(nt-\lfloor nt\rfloor)\xi_{\lfloor nt\rfloor+1}}\right)$$

où $e^{\xi} = \left(1+\xi,\ \frac{\xi^{\otimes 2}}{2}\right)$.

Et nous avons :

$\{S_2(W^{(n)})_t,\ t\geq 0\}$ converge faiblement vers $\mathbb{B}$ dans $\mathcal{C}_0^{\alpha\text{-Höl}}([0,1], G^2(\mathbb{R}^d))$.

Référence :

"Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths : Theory and Applications", Peter K. Friz, Nicolas B. Victoir, 2005.