Mémoire de Master 2 : Série de Le Page et régularité d'un processus stable (multi) fractionnaire réel harmonisable

Louckx Christophe
Université Lille 1

30 juin 2024

Table des matières

Résumé

En janvier 2022, j'ai pu lire le sujet de mémoire que proposait M. Ayache sur les mouvements multifractionnaires. Cherchant un sujet mêlant analyse fonctionnelle et probabilités, ayant suivi au premier semestre le cours de M.Tudor sur les processus et ayant été passionné par des questionnements sur le mouvement brownien fractionnaire, le sujet a piqué de suite ma curiosité. Puis le mémoire s'est dirigé vers l'étude des séries de Le Page, d'abord pour les lois symétriques stables, puis pour les processus symétriques stables, afin de présenter une application : la démonstration de l'existence de versions d'un processus réel stable harmonisable multifractionnaire vérifiant quelques hypothèses, dont les trajectoires sont höldériennes.
Je remercie l'université de Lille pour l'accueil de l'étudiant spécial que je suis de par ma situation, ainsi que M.Ayache pour sa disponibilité, son écoute.

Mots clé : Lois et processus symétriques stables, séries de Le Page, continuité höldérienne, mouvement multifractionnaire.

1 Introduction

Ce mémoire commence d'abord par un questionnement que j'ai eu lors du cours que j'ai suivi sur les processus stochastiques, concernant le mouvement brownien fractionnaire et sa variation quadratique. Ayant croisé plusieurs démonstrations erronées de l'absence de variation bornée (donc de variation quadratique), lorsque $0 < H < \frac{1}{2}$, j'ai alors cherché un véritable argument. M. Ayache m'a indiqué quelques pistes. J'en fais l'exposé.

Ensuite, on va s'intéresser à des extensions non gaussiennes du mouvement brownien fractionnaire. Nous allons essentiellement étudier les processus symétriques α-stables, leurs développements en séries de Le Page ainsi que leurs applications dans l'étude de la régularité des trajectoires de certains de ces processus. Mon étude des lois et processus stables repose sur [2], le livre de Taqqu-Samorodnitsky, avec en parallèle le livre [3] de Feller, et celui de Gnedenko [4]. Pour les séries de Le Page, tout d'abord encore [2], mais aussi l'article de Marcus et Pisier [5], et le second article [7] de Kôno et Maejima. Enfin le dernier théorème relatif à la continuité des trajectoires d'une version d'un processus réel hamonisable stable multifractionnaire est l'aboutissement d'une synthèse de l'étude des deux articles de Maejima [6], et [7], de l'article de Dozzi-Chevchenko [8], et de la thèse de Boutard, deuxième chapitre [9].

Nous allons passer en revue plusieurs théorèmes et rappels qui seront utiles pour ce mémoire. Rappelons tout d'abord un théorème de Paul Lévy :

Théorème 1.1 (Paul Lévy) *Soit $(X_n)_{n\leq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors les convergences $\mathbb{P}$-presque sûre, en probabilité et en loi de la série $\sum_{n\geq 1} X_n$ sont équivalentes.*

Notation 1.2 *Soit E un espace topologique muni de sa tribu borélienne $\mathrm{Bor}(E)$.*
Soient $T = \mathbb{N}$, ou $T = [0, a]$, où a est réel positif, ou encore $T = [0, +\infty[$.

Nous notons $T^{(\mathbb{N}^*)}$ l'ensemble des parties finies d'éléments appartenant à T.
Soient $I, J \in T^{(\mathbb{N}^*)}$, tels que $J \subset I$.
Notons $\phi_{I,J} : \begin{cases} E^I \to & E^J \\ (x_i)_{i\in I} \mapsto & (x_j)_{j\in J} \end{cases}$, la projection canonique.
Supposons donnée une famille de probabilités $(\mu_I)_{I\in T^{(\mathbb{N}^*)}}$, où μ_I est une probabilité sur l'espace $\left(E^I, \mathrm{Bor}\left(E^I\right)\right)$.
Nous notons $\phi_{I,J}(\mu_I)$ la loi marginale de μ_I sur l'espace E^J.

Définition 1.3 *Avec les notations précédentes, on dit que la famille de probabilités $(\mu_I)_{I\in T^{(\mathbb{N}^*)}}$ est <u>cohérente</u> si pour tous $I, J \in T^{(\mathbb{N}^*)}$, tels que $J \subset I$, on a : $\phi_{I,J}(\mu_I) = \mu_J$.*

Nous rappelons le théorème de consistance de Kolmogorov :

Théorème 1.4 (Théorème de consistance de Kolmogorov) *Soit E un espace polonais muni de sa tribu borélienne $\mathrm{Bor}(E)$.*
Soient T un ensemble non vide quelconque (indénombrable, c'est le cas intéressant).
Soit $(\mu_I)_{I\in T^{(\mathbb{N}^*)}}$ une famille cohérente de probabilités sur les ensembles E^I, pour tout I appartenant à $T^{(\mathbb{N}^*)}$.
Alors il existe un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$, pour lequel $(E, Bor(E))$ est l'espace de ses états, les μ_I sont ses lois fini-dimensionnelles, et où $\Omega = E^T, \mathcal{A} = \sigma\left(\{X_t, t \in T\}\right)$, et $(\mathcal{A}_t)_{t\in T}$ est sa filtration naturelle de X.
De plus, sur cet espace probabilisé, la probabilité $\mathbb{P}$ est unique.

Nous ferons appel dans ce mémoire le corollaire du théorème de consistance de Kolmogorov, réservés au cas d'un processus gaussien :

Corollaire 1.5 (Existence de processus gaussiens) *Soient $T = \mathbb{N}$, ou $T = [0, a]$, où a est un réel strictement positif, ou encore $T = [0, +\infty[$.*
Et soient $m : T \to \mathbb{R}$, et $\Gamma : T^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques telles que pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout sous-ensemble $I = \{t_1, \cdots, t_n\} \subset T$, la matrice $\Gamma_I = [\Gamma(t_i, t_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$ soit de type positif (on dit alors que la fonction Γ est de type positif).
Alors il existe un processus gaussien réel $(X_t)_{t\in T}$ unique à équivalence près, tel que pour tout $I = \{t_1, \cdots, t_n\} \subset T$, le vecteur $X_I = (X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ est de loi $\mathcal{N}_n(m_I, \Gamma_I)$, avec $m_I = (m(t_1), \cdots, m(t_n))$.

Preuve du corollaire 1.5
D'après le Théorème 1.4 de consistance de Kolmogorov, il suffit de montrer que la famille des lois $\left(\mathcal{N}_{\text{card}(I)}(m_I, \Gamma_I)\right)_{I \in T^{(\mathbb{N}^*)}}$ est cohérente.
Soit $I = \{t_1, \cdots, t_n\} \subset T$, et soit J une partie de I, notons d le cardinal de J. Et soient μ_J et μ_I les lois respectivement sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^n$ correspondantes.
Alors, $\widehat{\mu_I}$ désignant la fonction caractéristique du vecteur X_I, pour tout u appartenant à $\mathbb{R}^n$:

$$\widehat{\mu_I}(u) = \exp\left(i \langle m_I, u\rangle_I\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle u, \Gamma_I(u)\rangle_I\right).$$

(De même en remplaçant I par J, $< . , . >_J$ désignant par exemple le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$)
Notons $\widehat{\phi_{I,J}(\mu_I)}$ la fonction caractéristique de la loi marginale $\phi_{I,J}(\mu_I)$ de μ_I sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $(u_j)_{j\in\{1, \cdots, d\}} \in \mathbb{R}^d$:

$$\widehat{\mu_{I,J}}\left[(u_j)_{j\in J}\right] = \widehat{\mu_I}\left(\tilde{u}\right), \text{ où : } \tilde{u} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que : } \tilde{u}_i = \begin{cases} u_i, \text{ si } i \in J \\ 0, \text{ si } i \in I/J \end{cases}.$$

Donc, si v désigne le vecteur de $\mathbb{R}^d$ égal à $(u_j)_{j\in J}$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_{I,J}}(v) &= \exp\left(i \langle m_J, \tilde{u}\rangle_I\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \tilde{u}, \Gamma_I(u)\rangle_I\right) \\ &= \exp\left(i \langle m_J, v\rangle_J\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle v, \Gamma_J(v)\rangle_J\right).\end{aligned}$$

Donc, on a bien : $\widehat{\mu_{I,J}}\left[(u_j)_{j\in J}\right] = \widehat{\mu_J}\left[(u_j)_{j\in J}\right]$. d'où le résultat. □

Rappelons à présent le critère de continuité de Kolmogorov :

Théorème 1.6 (Continuité de Kolmogorov) *Soient $T = \mathbb{N}$, ou $T = [0, a]$, où a est un réel strictement positif, ou encore $T = [0, +\infty[$. Et soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.*
Supposons qu'il existe trois réels strictement positifs p, β, c tels que :

$$\forall\ s, t \in T : \mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^p\right] \leq c|t - s|^{1+\beta}.$$

Alors il existe une version $\tilde{X}$ de X à trajectoires continues.
De plus, sur tout compact $[0, b] \subset T$, où $b > 0$, les trajectoires de $\tilde{X}$ sont γ-höldériennes, pour tout γ appartenant à $\left]0, \frac{\beta}{p}\right[$:

$$\forall\ \omega \in \Omega, \exists K_\omega > 0 \mid \forall s, t \in [0, b] : \left|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)\right| \leq K_\omega|t - s|^\gamma.$$

Et voici un version dans le cas d'un processus gaussien centré :

Corollaire 1.7 (Continuité de Kolmogorov-Čentsov) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus gaussien centré et soit $a > 0$.*
Supposons qu'il existe des constantes c, η strictement positives telles que :

$$\forall\ s, t \in [0, a] : \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] \leq c|t - s|^\eta.$$

Alors, pour tout γ appartenant à $\left]0, \frac{\eta}{2}\right[$, il existe une version de $(X_t)_{t\geq 0}$, notée $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ ayant ses trajectoires γ-höldériennes sur $[0; a]$.

Preuve du corollaire 1.7 : Soient $0 \leq s < t \leq a$, alors $X_t - X_s$ suit la même loi que $\sqrt{\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)\right]^2}\ Z$, où Z suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Dès lors, pour tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^p\right] &= \left\{\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right]\right\}^{\frac{p}{2}}\ \mathbb{E}(|Z|^p) \\ &\leq C^{\frac{p}{2}}\ \mathbb{E}(|Z|^p)\ |t - s|^{\frac{\eta p}{2}}.\end{aligned}$$

Le Théorème 1.6 de continuité de Kolmogorov s'applique : pour tout γ appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{p} \times \left(\frac{\eta p}{2} - 1\right)\right[= \left]0, \frac{\eta}{2} - \frac{1}{p}\right[$, $(X_t)_{t\geq 0}$ admet une modification $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ dont les trajectoires sont γ-höldériennes sur $[0, a]$. Faisant alors tendre p vers $+\infty$, on obtient le résultat annoncé. $\square$

Enfin voici un lemme explicitant des intégrales que nous rencontrerons, sur les lois gamma :

Lemme 1.8 *Pour tout α appartenant à $]0,1[$, et pour tout λ strictement positif :*

i)
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\lambda u}}{u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha}\Gamma(1-\alpha).$$

ii)
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-\lambda+i)x}-1}{x^{\alpha+1}} \mathrm{d}x = \frac{-\lambda+i}{\alpha} \times \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}\psi(1),$$

où ψ désigne la fonction caractéristisque de la loi $\gamma(1-\alpha,\lambda)$, soit : $\psi(t) = \dfrac{\lambda^{1-\alpha}}{(\lambda-it)^{1-\alpha}}$.

PREUVE DU LEMME 1.8 :

i) Tout d'abord, à l'aide d'une intégration par parties, nous avons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\lambda u}}{u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u = \left[\frac{1-e^{-\lambda u}}{-\alpha u^\alpha}\right]_0^{+\infty} + \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u}}{u^\alpha}\mathrm{d}u = \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u}}{u^\alpha}\mathrm{d}u, \tag{1.1}$$

puisque :

a) $\alpha \in]0,1[$, donc $\dfrac{1-e^{-\lambda u}}{-\alpha u^\alpha} \underset{u\to 0^+}{\sim} -\dfrac{\lambda}{\alpha}u^{1-\alpha} \xrightarrow[u\to 0^+]{} 0.$

b) Comme $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{1-e^{-\lambda u}}{u^\alpha} = 0.$

Considérons à présent la loi gamma de paramètres $1-\alpha$ et λ, alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} e^{-\lambda u}u^{-\alpha}\mathrm{d}u = 1, \text{ d'où : } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u}}{x^\alpha}\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}. \tag{1.2}$$

Ainsi grâce à (1.2), (1.1) devient :

$$\lambda^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\lambda u}}{u^{1+\alpha}}\mathrm{d}u.$$

ii) La calcul est analogue à (i) :

$$\begin{aligned} I_\lambda =& \frac{-\lambda+i}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-\lambda+i)x}}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{-\lambda+i}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}x^{(1-\alpha)-1}e^{ix}\mathrm{d}x \\ =& \frac{-\lambda+i}{\alpha} \times \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}\psi(1), \end{aligned}$$

$\square$

Voici une première application de ce lemme, nous allons rencontrer une constante c_α dans tout le mémoire, je souhaitais l'expliciter :

Proposition 1.9 *Soit le réel* $c_\alpha = \left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \mathrm{d}x\right]^{-1}$, *pour tout* α *dans* $]0,2]$. *Alors :*

$$c_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}, \ si\ \alpha \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi}, \ si\ \alpha = 1 \end{cases}. \tag{1.3}$$

Preuve de la proposition 1.9 : Nous allons calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \mathrm{d}x$.

- Lorsque $\alpha = 1$, on reconnaît l'intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.
- Soit $0 < \beta < 1$, et soit $\lambda > 0$.

  Considérons $I_\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-\lambda+i)x} - 1}{x^{\beta+1}} \mathrm{d}x$. D'après le Lemme 1.8 (ii), nous avons :

$$I_\lambda = \frac{-\lambda + i}{\beta} \times \frac{\Gamma(1-\beta)}{\lambda^{1-\beta}} \psi(1), \tag{1.4}$$

  où ψ désigne la fonction caractéristisque de la loi $\gamma(1-\beta, \lambda)$, soit : $\psi(t) = \frac{\lambda^{1-\beta}}{(\lambda - it)^{1-\beta}}$. Dès lors, (1.4) devient :

$$I_\lambda = -\frac{(\lambda - i)^\beta}{\beta} \Gamma(1-\beta). \tag{1.5}$$

  Nous avons : $\lambda - i = \sqrt{\lambda^2 + 1}\, e^{i\theta_\lambda}$ où θ_λ est la mesure dans $]-\pi, \pi]$ de l'argument de $\lambda - i$.
  Nous avons : $\tan(\theta_\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} -\infty$, donc $\theta_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} -\frac{\pi}{2}$.
  Dès lors, en reprenant à (1.5) :

$$I_\lambda = -\frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta} \left(\lambda^2 + 1\right)^{\frac{\beta}{2}} e^{i\theta_\lambda \beta} \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} -\frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta}. \tag{1.6}$$

  D'autre part, d'après le critère de convergence de Dirichlet-Abel, puisque la fonction : $x \mapsto e^{-\lambda x}$ décroit vers 0^+, quand x tend vers $+\infty$, et comme l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\beta+1}} \mathrm{d}x$ converge :

$$\mathfrak{Im}(I_\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x} \sin(x)}{x^{\beta+1}} \mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\beta+1}} \mathrm{d}x \tag{1.7}$$

Alors, en identifiant les parties imaginaires dans (1.6) et (1.7), nous avons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta}\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) \tag{1.8}$$

De cette situation, si nous considérons à présent $1 < \alpha < 2$, alors $\beta = \alpha - 1 \in]0, 1[$, nous avons, grâce à (1.8) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta}\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right),$$

parce que : $\sin\left[\frac{\pi}{2}(\alpha-1)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)$.

— Pour le cas $0 < \alpha < 1$, considérons cette fois la partie réelle de I_λ. On identifie α à β.

$$\mathfrak{Re}(I_\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}\cos(x) - 1}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x$$

Le relation (1.6), nous dit que :

$$\mathfrak{Re}(I_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0^+]{} -\frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) \tag{1.9}$$

Or, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}\cos(x) - 1}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{\beta}\,\frac{e^{-\lambda x}\cos(x) - 1}{x^{\beta}}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{\beta}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda x}\cos(x) + e^{-\lambda x}\sin(x)}{x^{\beta}}\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda x}\cos(x)}{x^{\beta}}\mathrm{d}x - \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}\sin(x)}{x^{\beta}}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

car comme $0 < \beta < 1$:

$$\frac{e^{-\lambda x}\cos(x) - 1}{x^{\beta}} = \lambda x^{1-\beta} + o(x^{1-\beta}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \text{ et } \frac{\cos(x)}{x^{\beta}\exp(\lambda x)} - \frac{1}{x^{\beta}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Le critère de convergence de Dirichlet-Abel s'applique, puisque $e^{-\lambda x}$ décroit vers 0^+ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda x}\cos(x)}{x^{\beta}}\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to 0^+]{} 0.$$

Ainsi :

$$\mathfrak{Re}(I_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0^+]{} -\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\beta}}\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

En identifiant les limites dans (1.9) et (1.10), nous avons donc, comme $0 < \beta < 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\beta}}\mathrm{d}x = \Gamma(1-\beta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) = \frac{\Gamma(2-\beta)}{1-\beta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta\right).$$

□

2 Etude du mouvement Brownien fractionnaire

2.1 Une première caractérisation

Proposition 2.1 *Soit $H > 0$. Il existe un processus gaussien centré $(B_H(t))_{t\geq 0}$ admettant comme fonction de covariance, pour tout s, t réels positifs :*

$$\Gamma_H(s,t) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \tag{2.1}$$

si et seulement si $0 < H \leq 1$.

Preuve de la proposition 2.1 : (inspirée du livre de Nourdin [1])

Il s'agit de montrer que Γ_H est de type positif si et seulement si $0 < H \leq 1$.

— Si $H > 1$: Soient $t_1 = 1, t_2 = 2, a_1 = -2, a_2 = 1$, alors :

$$\begin{aligned} a_1^2\ \Gamma_H(t_1,t_1) &+ 2\ a_1 a_2\ \Gamma_H(t_1,t_2) + a_2^2\ \Gamma(t_2,t_2) \\ &= 4\ t_1^{2H} - 2\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right) + t_2^2 \\ &= 4 - 2(1 + 2^{2H} - 1) + 2^{2H} = 4 - 2^{2H} < 0, \end{aligned}$$

car $H > 1$. Donc Γ_H ne peut être de type positif.

— Si $H = 1$: $\Gamma_H(s,t) = \dfrac{1}{2}(s^2 + t^2 - (t-s)^2) = st$, alors :
$\forall\ d \geq 1, \forall\ t_1, \ \cdots, t_d \geq 0, \forall\ a_1, \ \cdots, a_d \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{1\leq k,l\leq d} a_k a_l \Gamma_1(t_k,t_l) = \sum_{1\leq k,l\leq d} a_k t_k a_l t_l = \left(\sum_{k=1}^{d} a_k t_k\right)^2 \geq 0.$$

Donc Γ_1 est bien de type positif.

— Si $0 < H < 1$: Faisons usage du Lemme 1.8, (i) avec $\lambda = x^2$ et $\alpha = H$. A l'aide d'un changement de variable $u = v^2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x^{2H} = \frac{H}{\Gamma(1-H)}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2 u}}{u^{1+H}}\mathrm{d}u &= \frac{H}{\Gamma(1-H)}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2 v^2}}{v^{2(1+H)}} \times 2v\ \mathrm{d}v \\ &= \frac{2H}{\Gamma(1-H)}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2 v^2}}{v^{1+2H}}\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Appliquant cette dernière relation à s, t et $|t-s|$:

$$s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H} = \frac{2H}{\Gamma(1-H)}\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-s^2v^2} - e^{-t^2v^2} + e^{-(t-s)^2v^2}}{v^{1+2H}}\ \mathrm{d}v \tag{2.3}$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\left(1-e^{-s^2v^2}\right)\left(1-e^{-t^2v^2}\right)+e^{-v^2t^2}\left(e^{-2v^2ts}-1\right)e^{-v^2s^2}\\
&\qquad\qquad = 1-e^{-s^2v^2}-e^{-t^2v^2}+e^{-v^2(t^2+s^2)}+e^{-v^2(t^2-2st+s^2)}-e^{-v^2(t^2+s^2)}\\
&\qquad\qquad = 1-e^{-t^2v^2}-e^{-s^2v^2}-e^{-v^2(t-s)^2}.
\end{aligned}$$

Dès lors, en remplaçant dans (2.3) :

$$\begin{aligned}
s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H} &= \frac{2H}{\Gamma(1-H)}\int_0^{+\infty}\frac{\left(1-e^{-v^2t^2}\right)\left(1-e^{-v^2s^2}\right)}{v^{1+2H}}\mathrm{d}v\\
&\qquad + \frac{2H}{\Gamma(1-H)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v^2t^2}\left(e^{2v^2ts}-1\right)e^{-v^2s^2}}{v^{1+2H}}\mathrm{d}v\\
&= \frac{2H}{\Gamma(1-H)}\int_0^{+\infty}\frac{\left(1-e^{-v^2t^2}\right)\left(1-e^{-v^2s^2}\right)}{v^{1+2H}}\mathrm{d}v\\
&\qquad + \frac{2H}{\Gamma(1-H)}\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{(vt)^n e^{-v^2t^2}(vs)^n e^{-v^2s^2}}{v^{1+2H}}\mathrm{d}v.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Dès lors, pour tout entier $d \geq 1$, pour tous $t_1, \cdots, t_d$ réels positifs ou nuls, et pour tous réels $a_1, \cdots, a_d$, en appliquant cette dernière relation (2.4) :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq k,l\leq d}\Gamma_H(t_k,t_l)a_k a_l &= \frac{H}{\Gamma(1-H)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{v^{1+2H}}\times\left[\sum_{1\leq k,l\leq d}\left(1-e^{-v^2t_k^2}\right)\left(1-e^{-v^2t_l^2}\right)a_k a_l\right]\mathrm{d}v\\
&\quad + \frac{H}{\Gamma(1-H)}\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{\sum_{1\leq k,l\leq d}\left[a_k(vt_k)^n e^{-v^2t_k^2}\right]\left[a_l(vt_l)^n e^{-v^2t_l^2}\right]}{v^{1+2H}}\mathrm{d}v.\\
&= \frac{H}{\Gamma(1-H)}\int_0^{+\infty}\frac{\left[\sum_{k=1}^{d}\left(1-e^{-v^2t_k^2}\right)a_k\right]^2}{v^{1+2H}}\mathrm{d}v\\
&\quad + \frac{H}{\Gamma(1-H)}\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{\left[\sum_{k=1}^{d}a_k(vt_k)^n e^{-v^2t_k^2}\right]^2}{v^{1+2H}}\mathrm{d}v \geq 0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Le Corollaire 1.5 nous dit donc qu'il existe alors un processus gaussien (unique à équivalence près) dont la fonction de covariance est Γ_H, pour $0 < H \leq 1$.

$\square$

Définition 2.2 *Pour $0 < H \leq 1$ le processus gaussien $(B_H(t))_{t\geq 0}$ ainsi créé est appelé mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst H.*

Remarque 2.3 Lorsque $H = \dfrac{1}{2}$ on retrouve le mouvement brownien. En effet, pour s, t réels positifs :

$$\Gamma_{\frac{1}{2}}(s,t) = \frac{1}{2}(s + t - |t - s|) = \min(t, s),$$

qui est la fonction de covariance du mouvement brownien.

2.2 Ses propriétés

Propriétés 2.4 *Considérons le mouvement brownien fractionnaire $(B_H(t))_{t\geq 0}$, pour $0 < H \leq 1$. Alors :*

i) $(B_H(t))_{t\geq 0}$ *est auto-similaire :*

$$\forall\ c > 0 : (c^{-H} B_H(ct))_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_H(t))_{t\geq 0}. \tag{2.5}$$

(égalité en termes de loi de processus).

ii) $(B_H(t))_{t\geq 0}$ *est un processus à accroissements stationnaires : pour tout* $h \geq 0$:

$$(B_H(t+h) - B_H(h))_{t\geq 0} \text{ est encore le mouvement brownien fractionnaire d'indice } H. \tag{2.6}$$

iii) $(B_H(t))_{t\geq 0}$ *admet une modification dont les trajectoires sont δ-höldériennes sur tout intervalle compact, pour tout δ appartenant à $]0; H[$. Mais les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire sont presque sûrement nulle part dérivables.*

iv) Variation quadratique : pour tout $t > 0$:

$$\langle B_H \rangle_t = \begin{cases} 0, \ si\ H > \dfrac{1}{2} \\ t, \ si\ H = \dfrac{1}{2} \\ +\infty, \ si\ H < \dfrac{1}{2} \end{cases}. \tag{2.7}$$

Preuve des propriétés 2.4, (i), (ii) et (iii) :

i) Pour un réel $c > 0$ fixé, $(c^{-H} B_H(ct))_{t\geq 0}$ est encore un processus gaussien centré et pour tous $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(c^{-H}B_H(ct), c^{-H}B_H(cs)\right) &= c^{-2H}\mathrm{Cov}\left(B_H(ct), B_H(cs)\right) \\
&= \frac{c^{-2H}}{2}\left[(ct)^{2H} + (cs)^{2H} - |ct - cs|^{2H}\right] \\
&= \frac{c^{-2H} \times c^{2H}}{2}\left[t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\right] \\
&= \mathrm{Cov}\left(B_H(t), B_H(s)\right).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

ii) Il faut prouver que pour tout $h > 0$, $(B_H(t + h) - B_H(h))_{t\geq 0}$ est aussi le mouvement brownien fractionnaire.

C'est encore un processus gaussien centré, et pour tous $t, s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}\ \left[B_H(t + h) - B_H(h), B_H(s + h) - B_H(h)\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[(B_H(t + h) - B_H(h))(B_H(s + h) - B_H(h))\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left(B_H(t + h), B_H(s + h)\right) - \mathbb{E}\left(B_H(t + h), B_H(h)\right) \\
&\qquad - \mathbb{E}\left(B_H(h), B_H(s + h)\right) + \mathbb{E}\left(B_H(h), B_H(h)\right) \\
&\quad = \mathrm{Cov}\left[B_H(t + h), B_H(s + h)\right] - \mathrm{Cov}\left[B_H(t + h), B_H(h)\right] \\
&\qquad - \mathrm{Cov}\left[B_H(h), B_H(s + h)\right] + \mathrm{Cov}\left[B_H(h), B_H(h)\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[(t + h)^{2H} + (s + h)^{2H} - |t - s|^{2H}\right] - \frac{1}{2}\left[(t + h)^{2H} + h^{2H} - t^{2H}\right] \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left[(s + h)^{2H} + h^{2H} - s^{2H}\right] + \frac{1}{2}\left[h^{2H} + h^{2H}\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\right) = \mathrm{Cov}\left[B_H(t), B_H(s)\right],
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

iii) Nous avons pour tous t, s réels positifs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(B_H(t) - B_H(s))^2\right] &= \Gamma_H(t, t) - 2\ \Gamma_H(s, t) + \Gamma_H(s, s) \\
&= t^{2H} + s^{2H} - 2 \times \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\right) = |t - s|^{2H}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Grâce à la relation (2.8), le Corollaire 1.7 (continuité de Kolmogorov-Čentsov) s'applique pour $\gamma = 2H$, et l'on a la continuité höldérienne annoncée.

Néanmoins nous n'avons pas la dérivabilité des trajectoires.

En effet, tout d'abord pour t, h positifs, $B_H(t + h) - B_H(t)$ suit la loi $\mathcal{N}(0, t^{2H})$.

Donc la variable Z_H égale à $\dfrac{B_H(t + h) - B_H(t)}{h^H}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Nous allons démontrer que le taux de variation $\dfrac{B_H(t+h)-B_H(t)}{h}$ diverge en probabilité vers $+\infty$, quand h tend vers 0.
Soit $M>0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{B_H(t+h)-B_H(t)}{h}\right|>M\right) &= \mathbb{P}\left(h^{1-H}\left|\frac{B_H(t+h)-B_H(t)}{h}\right|>Mh^{1-H}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left|\frac{B_H(t+h)-B_H(t)}{h^H}\right|>Mh^{1-H}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(|Z_H|>Mh^{1-H}\right) = \int_{\{|x|>Mh^{1-H}\}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Or, $\lim_{h\to 0^+} h^{1-H}=0$, car $H\in]0,1[$, donc, par convergence monotone :

$$\int_{\{|x|>Mh^{1-H}\}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[h\to 0^+]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Ainsi (2.9) nous donne, pour tout $M>0$: $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{B_H(t+h)-B_H(t)}{h}\right|>M\right) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 1.$
D'où le résultat.

$\square$

Preuve de la propriété 2.4, (iv) pour $\frac{1}{2}\leq H\leq 1$:

Soit $\Delta=(t_0,\ \cdots,t_n)$, où $n\geq 1$, et $0=t_0<t_1<\ \cdots<t_{n-1}<t_n=t$. Et notons $\Delta=\max\limits_{0\leq k\leq n-1} t_{k+1}-t_k$.

Alors, en désignant par T_Δ la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(B_H(t_{k+1})-B_H(t_k)\right)^2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T_\Delta\right] &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left(B_H(t_k+1)-B_H(t_k)\right)^2\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}|t_{k+1}-t_k|^{2H}\mathbb{E}(Z^2)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}|t_{k+1}-t_k|^{2H} \leq |\Delta|^{2H-1}\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k) = |\Delta|^{2H-1}t.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dès lors, lorsque $\frac{1}{2}<H\leq 1$, $\lim\limits_{|\Delta|\to 0^+}|\Delta|^{2H-1}=0$, et la relation (2.10) offre une convergence dans $L^1(\Omega)$ vers 0 de la variation quadratique.
Dans le cas $H=\frac{1}{2}$, nous avons à faire au mouvement brownien, nous allons prouver la convergence dans $L^2(\Omega)$ de T_Δ vers t.

Nous avons pour k dans $\{0, \cdots, n-1\}\}$: $B_{\frac{1}{2}}(t_{k+1}) - B_{\frac{1}{2}}(t_k) = \sqrt{t_{k+1}-t_k}Z$, où Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Donc :

$$\|T_\Delta - t\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left[(t_{k+1}-t_k)Z^2\right] = 2\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)^2 \leq 2|\Delta|t \xrightarrow{|\Delta|\to 0} 0.$$

$\square$

Commentaire 2.5 *C'est le dernier cas de la variation quadratique qui m'a longtemps interpellé...J'ai croisé le raisonnement suivant.*
En prenant la subdivision $\left(\frac{kt}{2^n},\ 0 \leq k \leq 2^n\right)$ *de l'intervalle* $[0,t]$*, alors, si* Δ_n *désigne l'ensemble des subdivisions* $(t_0, \cdots, t_n)$ *de cardinal* n *de l'intervalle* $[0,t]$:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \sup_{(t_0,\cdots,t_n)\in\Delta_n} \mathbb{E}&\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_H(t_{k+1})-B_H(t_k)\right)^2\right] \\ &\geq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(B_H\left(\frac{t(k+1)}{2^n}\right)-B_H\left(\frac{tk}{2^n}\right)\right)^2\right].\end{aligned}$$

Mais grâce à (2.6), alors la membre de droite devient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(B_H\left(\frac{t(k+1)}{2^n}\right)-B_H\left(\frac{tk}{2^n}\right)\right)^2\right] &= \sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{E}\left[\left(B_H\left(\frac{t(k+1)}{2^n}\right)-B_H\left(\frac{kt}{2^n}\right)\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\frac{t}{2^n}\right)^{2H} = t^{2H}\times 2^{n(1-2H)}.\end{aligned}$$

Or, comme $1-2H>0$*, alors* $2^{n(1-2H)}$ *diverge vers* $+\infty$*.*
Nous obtenons une divergence vers $+\infty$ *dans l'espace* $L^1(\Omega)$*. Nous n'obtenons pas de divergence en probabilité avec ce raisonnement.*
La divergence vers $+\infty$ *était* $\mathbb{P}$*-presque sûre en fait. Même plus, il y a divergence* $\mathbb{P}$*-presque sûre vers* $+\infty$ *de la variation (ce qui impliquera alors celle de la variation quadratique par l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Grâce au lemme qui suit, la divergence en probabilité sera vraie.*

Lemme 2.6 *Si une suite de variables aléatoires diverge* $\mathbb{P}$*-presque sûrement vers* $+\infty$*, alors cette suite diverge en probabilité vers* $+\infty$*.*

Preuve du lemme 2.6 : Ceci se traduit par :

$$\exists\, \Omega' \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(\Omega') = 1, \text{ et } \forall M > 0, \forall \omega \in \Omega', \exists N \geq 1 \mid \forall n \geq N : |X_n(\omega)| > M.$$

Ce qui donne, pour tout $M > 0$:

$$1 = \mathbb{P}\left[\limsup_{n\to+\infty}\{|X_n| > M\}\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N}\{|X_n| > M\}\right] = \lim_{N\to+\infty}\uparrow\ \mathbb{P}\left[\bigcap_{n\geq N}\{|X_n| > M\}\right].$$

Dès lors, si l'on note $\mathcal{A}_N = \bigcap_{n\geq N}\{|X_n| > M\}$, alors : $\mathcal{A}_N \subset \{|X_N| > M\}$.
Et alors : $\mathbb{P}(\mathcal{A}_N) \leq \mathbb{P}(|X_N| > M) \leq 1$.
Faisant tendre N vers $+\infty$, nous en déduisons que $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N| > M) = 1$.
M étant arbitraire, nous avons bien que X_n diverge en probabilité vers $+\infty$.

□

La démonstration de la divergence $\mathbb{P}$-presque sûre a besoin d'un lemme sur les vecteurs gaussiens :

Lemme 2.7 *Soit* $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ *un vecteur gaussien centré dans* $\mathbb{R}^2$.

Supposons que $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = 1$. *Alors :*

$$\mathrm{Cov}(|X_1|, |X_2|) \leq |\mathrm{Cov}(X_1, X_2)|. \tag{2.11}$$

Preuve du lemme 2.7 : Soit $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ sa matrice de covariance, et où :
$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = a \in]-1; 1[$. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux variables aléatoires indépendantes suivant $\mathcal{N}(0,1)$.
Alors :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \overset{\mathcal{L}}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1+a}{2}}\varepsilon_1 + \sqrt{\dfrac{1-a}{2}}\varepsilon_2 \\ \sqrt{\dfrac{1+a}{2}}\varepsilon_1 - \sqrt{\dfrac{1-a}{2}}\varepsilon_2 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

En effet, pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, d'une part :

$$\mathbb{E}\left\{\exp[i(xX_1 + yX_2)]\right\} = \exp\left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \Gamma \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x^2 + 2axy + y^2\right)\right].$$

D'autre part, comme $\varepsilon_1 \perp\!\!\!\perp \varepsilon_2$, et comme $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ suivent la loi $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{\exp\left[i\left((x+y)\sqrt{\frac{1+a}{2}}\varepsilon_1+(x-y)\sqrt{\frac{1-a}{2}}\varepsilon_2\right)\right]\right\}& \\
=\exp\left[-\frac{1+a}{4}(x+y)^2\right]\times\exp\left[-\frac{1-a}{4}(x-y)^2\right]& \\
=\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+2axy+y^2\right)\right].&
\end{aligned}$$

Nous avons : $|\mathrm{Cov}(X_1,X_2)|=|a|$, et $\mathbb{E}(|X_1|)=\mathbb{E}(|X_2|)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}$.
Et : $\mathrm{Cov}(|X_1||X_2|)=\mathbb{E}(|X_1X_2|)-\mathbb{E}(|X_1|)\mathbb{E}(|X_2|)$.
Mais grâce à (2.12) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_1X_2|\right)&=\mathbb{E}\left[\left|\left(\sqrt{\frac{1+a}{2}}\;\varepsilon_1+\sqrt{\frac{1-a}{2}}\;\varepsilon_2\right)\left(\sqrt{\frac{1+a}{2}}\;\varepsilon_1-\sqrt{\frac{1-a}{2}}\;\varepsilon_2\right)\right|\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\left|\frac{1+a}{2}\;\varepsilon_1^2-\frac{1-a}{2}\;\varepsilon_2^2\right|\right]\leq\mathbb{E}\left(\frac{1+a}{2}\;\varepsilon_1^2+\frac{1-a}{2}\;\varepsilon_2^2\right).
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Les variables $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ étant indépendantes, et suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1+a}{2}\;\varepsilon_1^2+\frac{1-a}{2}\;\varepsilon_2^2\right)=\left(\frac{1+a}{2}\right)^2+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2=\frac{1+a^2}{2}.\tag{2.14}$$

(2.13) et (2.14) donnent alors : $\mathbb{E}(|X_1X_2|)\leq\dfrac{1+a^2}{2}$.
Et alors : $\mathrm{Cov}(|X_1),|X_2|)\leq\dfrac{1+a^2}{2}-\dfrac{2}{\pi}$.
Une étude rapide de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(a)=\dfrac{1+a^2}{2}-\dfrac{2}{\pi}-|a|$, montre qu'elle admet comme maximum : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{\pi}<0$, ce qui prouve finalement (2.11).

$\square$

Preuve de (2.7) dans le cas $0<H<\frac{1}{2}$: Nous allons donc prouver une divergence $\mathbb{P}$-presque sûre vers $+\infty$ de la variation pour la subdivision : $\left(\dfrac{k}{2^n},\ 0\leq k\leq 2^n\right)$ de l'intervalle $[0,1]$.
Considérons la variation :

$$S_n=\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|B_H\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-B_H\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}-1\right|>\frac{1}{2}\right)=\mathbb{P}\left(|S_n-\mathbb{E}(S_n)|>\frac{\mathbb{E}(S_n)}{2}\right)\leq\frac{4\ \mathrm{Var}(S_n)}{[\mathbb{E}(S_n)]^2}.\tag{2.15}$$

En posant pour k dans $\{0\ ,\cdots,\ 2^n-1\}$: $\Delta_{H,k} = B_H\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - B_H\left(\frac{k}{2^n}\right)$, nous avons :

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{Var}\left(|\Delta_{H,k}|\right) + 2 \sum_{0\le l<k\le 2^n-1} \mathrm{Cov}\left(|\Delta_{H,k}|, |\Delta_{H,l}|\right). \tag{2.16}$$

$(B_H(t))_{t\geq 0}$ étant gaussien centré, grâce au Lemme 2.7 à la relation (2.5) puis à la relation (2.6), d'une part :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(|\Delta_{H,k}|, |\Delta_{H,l}|\right) &\le \left|\mathrm{Cov}\left(\Delta_{H,k}, \Delta_{H,l}\right)\right| \\ &= 2^{-2nH}\left|\mathrm{Cov}\left[B_H(k+1)-B_H(k), B_H(l+1)-B_H(l)\right]\right| \\ &= 2^{-2nH}\left|\mathrm{Cov}\left[B_H(k-l+1)-B_H(k-l), B_H(1)\right]\right|\end{aligned} \tag{2.17}$$

Et d'autre part :

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{Var}\left(|\Delta_{H,k}|\right) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-2nH} \mathrm{Var}\left(|B_H(1)|\right) = 2^{n-2nH} \times \frac{2}{\sqrt{2\pi}}. \tag{2.18}$$

Combinant les relations (2.17) et (2.18), (2.16) devient :

$$\mathrm{Var}(S_n) \le 2^{n-2nH} \times \frac{2}{\sqrt{2\pi}} + 2 \sum_{0\le l<k\le 2^n-1} 2^{-2nH}\left|\mathrm{Cov}\left[B_H(k-l+1)-B_H(k-l), B_H(1)\right]\right|. \tag{2.19}$$

Considérons pour $x \geq 0$:

$$g(x) = \mathrm{Cov}\left(B_H(x), B_H(1)\right) = \mathbb{E}(B_H(x), B_H(1)) = \frac{1}{2}\left(x^{2H} + 1 - |x-1|^{2H}\right).$$

Alors, pour tout entier naturel p non nul :

$$\begin{aligned}|g(p+1)-g(p)| &= \frac{1}{2}\left|(p+1)^{2H} + 1 - (p+1-1)^{2H} - \left(p^{2H} + 1 - (p-1)^{2H}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(p+1)^{2H} + (p-1)^{2H} - 2p^{2H}\right| \\ &= \frac{p^{2H}}{2}\left|\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2H} + \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2H} - 2\right| \\ &= \frac{p^{2H}}{2}\left|1 + \frac{2H}{p} + \frac{H(2H-1)}{p^2} + 1 - \frac{2H}{p} + \frac{H(2H-1)}{p^2} - 2 + o\left(\frac{1}{p^2}\right)\right| \\ &= p^{2H-2} \times [H(2H-1) + o(1)],\end{aligned}$$

qui est le terme d'une série convergente, puisque $0 < H < \frac{1}{2}$.

Donc, désignons par M la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |g(p+1)-g(p)|$.

Ainsi le second terme dans (2.19) va être majoré, en effectuant le changement $k-l=p$:

$$2 \sum_{0\leq l<k\leq 2^n-1} 2^{-2nH} \left|f(k-l+1)-f(k-l)\right| \leq 2M \times 2^n \times 2^{-2nH}.$$

Et donc (2.16) devient :

$$\mathrm{Var}(S_n) \leq 2^{n-2nH} \times \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} + 2M\right). \tag{2.20}$$

Ensuite, de nouveau grâce à (2.5) puis à (2.6) :

$$\begin{aligned}
[\mathbb{E}(S_n)]^2 &= \left[\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left(\left|B_H\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - B_H\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|\right)\right]^2 \\
&= 2^{-2nH} \left[\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left(|B_H(k+1)-B_H(k)|\right)\right]^2 \\
&= 2^{-2nH} \times (2^n \mathbb{E}(|B_H(1)|))^2 = \frac{2}{\pi} \times 2^{-2nH+2n}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Combinant enfin (2.20) et (2.21), (2.15) devient :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} - 1\right| > \frac{1}{2}\right) \leq 4\, \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{[\mathbb{E}(S_n)]^2} \leq 4\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} + 2M\right) 2^{-n},$$

qui est le terme d'une série géométrique convergente.

Le lemme de Borel-Cantelli affirme que : $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \left\{\left|\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} - 1\right| > \frac{1}{2}\right\}\right) = 0.$

Ou encore :

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} \left\{\left|\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} - 1\right| \leq \frac{1}{2}\right\}\right) = 1.$$

Il existe alors un évènement Ω^* appartenant à $\mathcal{F}$ de probabilité égale à 1 telle que :

$$\forall\ \omega \in \Omega^*, \exists\ N_0(\omega) \geq 1 \mid \forall\ n \geq N_0(\omega) : \left|\frac{S_n(\omega)}{\mathbb{E}(S_n)} - 1\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Alors :

$$\frac{S_n(\omega)}{\mathbb{E}(S_n)} \geq \frac{1}{2}, \text{ soit : } S_n(\omega) \geq \frac{\mathbb{E}(S_n)}{2}. \tag{2.22}$$

Mais comme $0 < H < \frac{1}{2}$, (2.21) nous dit que $\mathbb{E}(S_n)$ diverge vers $+\infty$. Donc, S_n diverge bien vers $+\infty$, $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Enfin, notons la variation $T_n = \sum_{k=0}^{2^n-1}\left[B_H\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - B_H\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]^2$. La relation (2.22) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, $\mathbb{P}$-presque sûrement :

$$0 \leq \frac{\mathbb{E}(S_n)}{2} \leq S_n \leq \sqrt{2^n}\sqrt{T_n}.$$

L'égalité (2.21), donne alors :

$$T_n \geq \frac{[\mathbb{E}(S_n)]^2}{4 \times 2^n} = \frac{2^{2n-2nH-n}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times 2^{n(1-2H)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

car $0 < H < \frac{1}{2}$. Ainsi nous avons la divergence $\mathbb{P}$-presque sûre vers $+\infty$ de T_n. Ce qui implique que la variation quadratique du mouvement brownien fractionnaire lorsque $0 < H < \frac{1}{2}$ est infinie. $\square$

3 Les lois symétriques stables

Nous présentons dans cette section, une liste de définitions et de propriétés/théorèmes sur les lois stables, que nous admettons. Nous préciserons les références.

3.1 Définition et propriétés élémentaires des lois stables, cas symétrique

3.1.1 Indice de stabilité

Définition 3.1 *La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite stable ou de loi stable si pour tous réels strictement positifs a, b et toutes copies X_1, X_2 indépendantes de X, il existe deux réels c et d tels que :*

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} cX + d. \tag{3.1}$$

On dit que X est strictement stable si pour tous réels a, b strictement positifs, et toutes copies X_1, X_2 indépendantes de X, il existe un réel c tel que : $aX_1 + bX_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} cX$.

Remarque 3.2

i) Si X a pour loi le dirac δ_{x_0}, pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, alors X est stable. En effet, pour deux copies indépendantes X_1, X_2 fixés de X et pour deux réels a, b strictement positifs fixés, déterminons c et d tels que : $aX_1 + bX_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} cX + d$.

En passant par les fonctions caractéristiques, pour tout t réel :

$$\begin{aligned}\phi_{aX_1+bX_2}(t) &= \phi_{aX_1}(t) \times \phi_{bX_2}(t)\\ &= \phi_{X_1}(at) \times \phi_{X_2}(bt) = e^{iatx_0} \times e^{ibtx_0}\\ &= e^{i(a+b)tx_0} = \phi_{(a+b)X}(t).\end{aligned}$$

Il en résulte que $c = a + b$, et $d = 0$. Ce cas est pathologique et n'a pas vraiment d'intérêt.

ii) Nous rappelons qu'une variable aléatoire est symétrique (ou est de loi symétrique), si les lois de X et de $-X$ sont les mêmes.
Dès lors, une loi symétrique stable est strictement stable (réciproque fausse à cause de (i) par exemple), car $aX_1 + bX_2$ est de même loi que $(a - b)X$, puisque X_2 et $-X_2$ sont de même loi. En effet, pour deux copies indépendantes X_1, X_2 de X et pour deux réels a, b strictement positifs, soient c et d deux réels tels que : $aX_1 + bX_2 \overset{\mathcal{L}}{=} cX + d$. Supposons d non nul. Alors, par symétrie de X_1, X_2 et X, nous avons :

$$cX + d \overset{\mathcal{L}}{=} aX_1 + bX_2 \overset{\mathcal{L}}{=} -(aX_1 + bX_2) \overset{\mathcal{L}}{=} -cX - d \overset{\mathcal{L}}{=} cX - d.$$

D'où : $cX + d \overset{\mathcal{L}}{=} cX - d$. Ce qui équivaut, pour les fonctions caractéristiques, pour tout t réel :

$$\phi_{cX+d}(t) = \phi_{cX-d}(t) \Rightarrow \mathbb{E}\left[e^{i(cX+d)t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i(cX-d)t}\right] \Rightarrow e^{idt}\mathbb{E}\left(e^{ict}\right) = e^{-idt}\mathbb{E}\left(e^{ict}\right).$$

Donc, pour tout t réel, $e^{2idt} = 1$, en particulier, pour $t = \dfrac{\pi}{2d}$, nous obtenons : $e^{i\pi} = 1$, ce qui est faux. D'où le résultat.

Lemme 3.3 *Soit X une variable aléatoire réelle stable. Alors, si pour $n \geq 1$, S_n désigne la somme de n copies indépendantes de X nommées $X_1, \cdots, X_n$:*

i) Il existe $c_n > 0$, et un réel d_n tels que $S_n \overset{\mathcal{L}}{=} c_n X + d_n$.

ii) $\exists ! \ \alpha \in \,]0, 2] \mid \forall n \geq 1 : c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$

Théorème 3.4 *Soit X une variable aléatoire réelle. Alors elle est stable si et seulement si la relation (3.1) de la Définition 3.1 a lieu, et alors :*

$$\exists ! \ \alpha \in \,]0, 2] \mid \forall \ a, b > 0 : c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha. \tag{3.2}$$

Corollaire 3.5 *Une variable aléatoire réelle X est stable si et seulement s'il existe une suite de réels strictement positifs $(c_n)_n$ et une autre suite de réels $(d_n)_n$ telles que pour tout entier naturel non nul n, et toutes copies $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes de X : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\mathcal{L}}{=} c_n X + d_n$.*

Définition 3.6 *Soit X une variable aléatoire réelle stable. L'indice α défini de manière unique dans le Lemme 3.3 et le Théorème 3.4 est appelé indice de stabilité de X. X est alors dite α-stable.*

Remarque 3.7

— Dans la démonstration de tous ces résultats, nous démontrons qu'une loi normale est 2-stable, strictement 2-stable quand elle est centrée (car symétrique). D'autre part, les lois 2-stables sont les seules lois stables à posséder un moment d'ordre 2 fini (car appliquant la variance à la relation (3.2), nous obtenons : $c^2 = a^2 + b^2$, donc par unicité de l'indice de stabilité : $\alpha = 2$).

— Les démonstrations du Lemme 3.3, du Théorème 3.4, et du Corollaire 3.5 sont exposées dans le livre de Feller [3].

3.1.2 Domaine d'attraction

Définition 3.8 *Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que la loi de X possède un domaine d'attraction s'il existe une suite $(Y_n)_n$ de variables aléatoires i.i.d, une suite $(a_n)_n$ de réels strictement positifs et une suite $(b_n)_n$ de réels telles que :*

$$\frac{1}{a_n}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k - b_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X. \tag{3.3}$$

On dit alors que la loi commune aux Y_n appartient au domaine d'attraction de la loi de X.

Théorème 3.9 *Une loi est stable si et seulement si elle possède un domaine d'attraction.*

3.1.3 Fonction caractéristique d'une loi stable

Définition 3.10 *Soient $\alpha, \sigma, \beta, \mu$ tels que $0 < \alpha \leq 2,\ \sigma \geq 0,$ et $-1 \leq \beta \leq 1$.*
Notons $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ la loi dont pour fonction caractéristique de toute variable X qui la suit est, pour tout réel :

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \exp\left[-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta\ \mathrm{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) + i\mu t\right],\ si\ \alpha \neq 1 \\ \exp\left[-\sigma |t| \left(1 - \frac{2}{\pi} i\beta\ \mathrm{sgn}(t)\log(|t|)\right) + i\mu t\right],\ si\ \alpha = 1 \end{cases}. \tag{3.4}$$

Théorème 3.11 *Les lois $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, où $0 < \alpha \leq 2,\ \sigma \geq 0,$ et $-1 \leq \beta \leq 1$ sont exactement toutes les lois stables.*

Remarque 3.12

— Les démonstrations des Théorèmes 3.9 et 3.11 se trouvent dans les livres de Feller [3], et de Gnedenko [4].

— Nous retrouvons bien sur les gaussiennes (quand $\alpha = 2$).
D'autre part, la loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ est symétrique autour de μ si et seulement si $\beta = 0$.
Enfin, les lois symétriques stables ($S\alpha S$) sont les lois $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ de fonction caractéristique :

$$\phi_X(t) = \exp\left[-\sigma^\alpha |t|^\alpha\right]. \tag{3.5}$$

3.1.4 Propriétés des lois stables

Propriétés 3.13 *Soient X, X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, $S_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1)$ et $S_\alpha(\sigma_2, \beta_2, \mu_2)$, alors :*

i) $X_1 + X_2$ suit la loi $S_\alpha(\sigma_3, \beta_3, \mu_3)$ où :

$$\sigma_3 = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta_3 = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \text{ et : } \mu_3 = \mu_1 + \mu_2.$$

ii) Pour tout réel a, $X + a$ suit la loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$.

iii) Pour tout réel a non nul :

a) Si $\alpha \neq 1$, alors aX suit la loi $S_\alpha\left(|a|\sigma, \mathrm{sgn}(a)\beta, a\mu\right)$.

b) Si $\alpha = 1$, alors : aX suit la loi $S_1\left(|a|\sigma, \mathrm{sgn}(a)\beta, a\mu - \dfrac{2}{\pi}a\left(\log(|a|)\sigma\beta\right)\right)$.

iv) Si $0 < \alpha < 2$, alors X suit la loi $S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \iff -X$ suit la loi $S_\alpha(\sigma, -\beta, 0)$.

v) X est symétrique par rapport à μ si et seulement si $\beta = 0$. Et elle est alors symétrique si et seulement si $\mu = \beta = 0$.

vi) Si $\alpha \neq 1$, alors X est strictement stable si et seulement si $\mu = 0$. Dès lors, si X suit la loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ alors $X - \mu$ est strictement stable.

v) Si $\alpha = 1$, alors X est strictement stable si et seulement $\beta = 0$.

Propriétés 3.14 *Soit X suivant la loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, pour un certain α appartenant à $]0, 2[$. Rappelons la constante : $c_\alpha = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \mathrm{d}x\right)^{-1}$. Alors :*

i) $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^\alpha \mathbb{P}(X > \lambda) = c_\alpha \sigma^\alpha \times \tfrac{1+\beta}{2}$, et $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^\alpha \mathbb{P}(X < -\lambda) = c_\alpha \sigma^\alpha \times \tfrac{1-\beta}{2}$,

ii) Dans le cas où $\alpha = 1$, supposons que $\beta = 0$. Alors, pour tout p appartenant à $]0, \alpha[$, il existe une constante $c_{\alpha,\beta}(p)$ telle que :

$$\left(\mathbb{E}\left(|X|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} = c_{\alpha,\beta}(p)\sigma.$$

Remarque 3.15 Les démonstrations des Propriétés 3.13 se trouvent dans le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2], et celles des Propriétés 3.14 dans Feller [3].

3.1.5 Théorème limite

Définition 3.16

i) On dit qu'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est <u>à variation lente</u> si elle vérifie :

$$\forall c > 0 : \lim_{x \to -\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1 \tag{3.6}$$

ii) <u>Le moment tronqué d'une variable aléatoire réelle</u> X noté μ_X est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\mu_X(x) = \int_{-x}^{x} t^2 \mathrm{d}\mathbb{P}_X(t). \tag{3.7}$$

Théorème 3.17 *Soit X une variable aléatoire réelle non constante. La loi de X appartient à un domaine d'attraction si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :*

i) $\mu_X(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{2-\alpha} h(x)$, où h est à variation lente.

ii) Soit $\alpha = 2$, soit $0 < \alpha < 2$, et F désignant la fonction de répartition de X :

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(x) + F(-x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} p, \text{ et : } \frac{F(-x)}{1 - F(x) + F(-x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} q, \text{ avec : } p + q = 1. \tag{3.8}$$

Théorème 3.18 *La loi d'une variable aléatoire Y appartient au domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $0 < \alpha < 2$ si et seulement s'il existe $c_1, c_2 \geq 0$, non toutes deux nulles, deux fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont deux fonctions numériques définie sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$, et une fonction h à variation lente telles que :*

$$F_Y(-x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{c_1 + \varepsilon_1(x)}{x^\alpha} h(x), \text{ et : } 1 - F_Y(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{c_2 + \varepsilon_2(x)}{x^\alpha} h(x), \tag{3.9}$$

Corollaire 3.19 *La loi d'une variable aléatoire symétrique Y sans atome appartient au domaine d'attraction d'une loi stable symétrique d'indice $0 < \alpha < 2$ si et seulement s'il existe $c > 0$, et une fonction h à variation lente telles que :*

$$x^\alpha \mathbb{P}(|Y| > x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (c + o(1)) h(x). \tag{3.10}$$

Preuve du corollaire 3.19 : Grâce au théorème précédent, en posant $c = c_1 + c_2 > 0$, comme X est symétrique, alors $\mathbb{P}(|Y| > x) = 1 - F_Y(x) + F_Y(-x)$ et les quantités étant toutes positives, nous avons :

$$\forall \delta > 0, \exists M > 0 \mid \forall x > M : \begin{cases} |\varepsilon_1(x)| < \delta, \ |\varepsilon_2(x)| < \delta, \\ x^\alpha F_Y(-x) = [c_1 + \varepsilon_1(x)] h(x), \\ x^\alpha (1 - F_Y(x)) = [c_2 + \varepsilon_2(x)] h(x). \end{cases}$$

On en déduit que : $x^\alpha \mathbb{P}(|Y| > x) = [c + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)]h(x)$.

$\square$

Il résulte du Théorème 3.9 le théorème suivant :

Théorème 3.20 (limite) *Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables i.i.d, dont la loi appartient à un domaine d'attraction, et soit α défini par le Théorème 3.17. Alors il existe un réel $\sigma \geq 0$, un réel β tel que $-1 \leq \beta \leq 1$, un réel μ, une suite de réels strictement positifs $(a_n)_n$ et une autre de réels $(b_n)_n$ telles que :*

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - b_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X, \text{ où } X \text{ est de loi } S_\alpha(\sigma, \beta, \mu).$$

De plus, on a :

i) Si $\mathbb{E}(|Y_1|) < +\infty$, alors $b_n = \mathbb{E}(Y_1)$ convient et alors avec ce choix $\mu = 0$.

ii) Si la loi de Y_1 est symétrique, alors $\beta = 0$.

iii) Si $\mathbb{E}(Y_1^2) < +\infty$, alors $\alpha = 2$, et dans ce cas : $2\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y_1)$, X est de loi $\mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2)$.

Remarque 3.21 Les démonstrations des Théorèmes 3.17, 3.18 et 3.20 se trouvent dans le livre de Feller [3].

3.2 Caractérisations des processus de Poisson

Nous allons dans cette section présenter deux constructions d'un processus de Poisson. La première à l'aide du Théorème 1.4 de consistance de Kolmogorov va nous permettre de définir le processus de Poisson canonique. Et la seconde construction à l'aide la notion d'instants d'arrivée nous permettra de montrer des propriétés qui nous seront utiles.

3.2.1 Construction à l'aide du théorème de consistance de Kolmogorov

Théorème 3.22 *Soit $\lambda > 0$. Il existe un processus (unique à équivalence près) $(N_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, à accroissements indépendants et stationnaires tel que $N_0 = 0$, et tel que pour tous t et s positifs ou nuls tels que $s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$.*

Preuve du théorème 3.22 : Soit n un entier naturel non nul, et soient $t_1, t_2, \cdots, t_n$ des réels tels que : $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Désignons par I l'ensemble $\{t_1, \cdots, t_n\}$. Nous posons $t_0 = 0$.

Alors, puisque la variable $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda(t_k - t_{k-1}))$ pour chaque k appartenant à $\{1, \cdots, n\}$ et par indépendance des accroissements, la loi du vecteur aléatoire $\left(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \cdots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}\right)$, est : $\mathcal{P}(\lambda(t_1)) \otimes \mathcal{P}(\lambda(t_2 - t_1)) \cdots \otimes \mathcal{P}(\lambda(t_n - t_{n-1}))$.
Nous allons démontrer que la famille des lois fini-dimensionnelles est cohérente. La loi μ_I désignant la loi du vecteur aléatoire : $(N_{t_1}, \cdots, N_{t_n})$, cette loi a pour fonction caractéristique la fonction $\widehat{\mu_I}$ telle que pour tous réels $u_1, \cdots, u_n$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_I}(u_1, \cdots, u_n) =& \mathbb{E}\left[e^{iu_1 N_{t_1}} \times \cdots \times e^{iu_n N_{t_n}}\right] \\ =& \mathbb{E}\left[e^{iu_1 N_{t_1}} \times e^{iu_2[(N_{t_2} - N_{t_1}) + N_{t_1}]} \times \cdots \times e^{iu_n[(N_{t_n} - N_{t_{n-1}}) + \cdots + (N_{t_2} - N_{t_1}) + N_{t_1}]}\right] \\ =& \mathbb{E}\left[e^{i\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) N_{t_1}} \times e^{i\left(\sum\limits_{k=2}^{n} u_k\right)(N_{t_2} - N_{t_1})} \times \cdots \times e^{iu_n (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})}\right]\end{aligned} \tag{3.11}$$

Or, si une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ pour $\alpha > 0$, alors sa fonction caractéristique est, pour tout t réel : $\widehat{\mu}(t) = \exp\left[\alpha\left(e^{it} - 1\right)\right]$.
Ainsi, puisque la variable $N_{t_k} - N_{k-1}$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda(t_k - t_{k-1}))$ pour chaque k appartenant à $\{1, \cdots, n\}$ et par indépendance des accroissements, la relation (3.11) devient :

$$\begin{aligned}&\widehat{\mu_I}(u_1, \cdots, u_n) = \mathbb{E}\left[e^{i\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) N_{t_1}}\right] \times \mathbb{E}\left[e^{i\left(\sum\limits_{k=2}^{n} u_k\right)(N_{t_2} - N_{t_1})}\right] \times \cdots \times \mathbb{E}\left[e^{iu_n (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})}\right] \\ &= \exp\left[\lambda(t_1 - t_0) \times \left(e^{i\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)} - 1\right)\right] \times \exp\left[\lambda(t_2 - t_1) \times \left(e^{i\left(\sum\limits_{k=2}^{n} u_k\right)} - 1\right)\right] \times \cdots \\ &\times e^{\lambda(t_n - t_{n-1})\left(e^{iu_n} - 1\right)}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Soit maintenant $J \subset I$. La fonction caractéristique $\widehat{\phi_{I,J}(\mu_I)}$ de la loi marginale $\phi_{I,J}(\mu_I)$ de μ_I sur $\mathbb{R}^J$ est la fonction obtenue à partir de l'expression de $\widehat{\mu_I}(u_1, \cdots, u_n)$ dans (3.12) en remplaçant u_i par 0 pour les entiers i tels que t_i n'appartient pas à J. Il faut montrer que cette fonction est égale à $\widehat{\mu_J}$.
L'ensemble J est de la forme : $\{t_{k_1}, \cdots, t_{k_d}\}$ où $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_d \leq n$, pour un entier $d \geq 1$.
Alors de manière analogue à la relation (3.12), μ_J désignant la loi du vecteur aléatoire : $(N_{t_{k_1}}, \cdots, N_{t_{k_d}})$, la fonction caractéristique $\widehat{\mu_J}$ est définie sur $\mathbb{R}^d$ pour tout $w = (w_1, \cdots, w_d)$

par :

$$\widehat{\mu_J}(w) = \exp\left[\lambda(t_{k_1}-t_0)\times\left(e^{i\left(\sum\limits_{j=1}^{d}w_j\right)}-1\right)\right]\exp\left[\lambda(t_{k_2}-t_{k_1})\times\left(e^{i\left(\sum\limits_{j=2}^{d}w_j\right)}-1\right)\right]\times\cdots$$
$$\times e^{\lambda(t_{k_d}-t_{k_{d-1}})\left(e^{iw_d}-1\right)}.$$

Soit $\tilde{u}$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout i appartenant à $\{1,\ \cdots,n\}$: $\tilde{u}_i = \begin{cases} 0, \text{ si } i \notin \{k_1,\ \cdots,k_d\} \\ u_i, \text{ si } i \in \{k_1,\cdots,k_d\} \end{cases}$

Et soit v l'élément de $\mathbb{R}^d$ tel que $v = (u_{k_1},\ \cdots,u_{k_d})$.

Alors :

$$\widehat{\phi_{I,J}(\mu_I)}(v) = \widehat{\mu_I}(\tilde{u})$$
$$= \exp\left[\lambda(t_1-t_0)\times\left(e^{i\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{u}_k\right)}-1\right)\right]\times\exp\left[\lambda(t_2-t_1)\times\left(e^{i\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\tilde{u}_k\right)}-1\right)\right]\times\cdots \tag{3.13}$$
$$\times\, e^{\lambda(t_n-t_{n-1})\left(e^{i\tilde{u}_n}-1\right)}.$$

Observons que si $k_1 > 0$, alors chaque $\tilde{u}_i$ est nul pour tout i appartenant à $\{1,\ \cdots,k_1-1\}$. Mais aussi, si $k_d < n$, alors chaque $\tilde{u}_i$ est nul pour tout i appartenant à $\{k_d+1,\ \cdots,n\}$. Ainsi, les quatre sommes $\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{u}_k$, $\sum\limits_{k=k_1}^{k_d}\tilde{u}_k$, $\sum\limits_{j=1}^{d}u_{k_j}$ et enfin $\sum\limits_{j=1}^{d}v_j$ sont égales.

Et de même plus généralement, pour p appartenant à $\{1,\ \cdots,d\}$:

$$\sum_{k=k_p}^{k_d}\tilde{u}_k = \sum_{j=p}^{d}u_{k_j} = \sum_{j=p}^{d}v_j. \tag{3.14}$$

Considérons, à présent le produit des k_1 premiers facteurs définissant $\widehat{\phi_{I,J}(\mu_I)}(v)$ (relation (3.13)) Nous avons, suite à ce qui précède, et en notant, pour tout réel x : $T(x) = e^{ix}-1$:

$$\exp\left[\lambda(t_1-t_0)T\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{u}_k\right)\right]\exp\left[\lambda(t_2-t_1)T\left(\sum_{k=2}^{n}\tilde{u}_k\right)\right]\cdots\exp\left[\lambda(t_{k_1}-t_{k_1-1})T\left(\sum_{k=k_1}^{n}\tilde{u}_k\right)\right]$$
$$= \exp\left[\lambda(t_1-t_0)\times T\left(\sum_{k=k_1}^{k_d}\tilde{u}_k\right)\right]\times\cdots\times\exp\left[\lambda(t_{k_1}-t_{k_1-1})T\left(\sum_{k=k_1}^{k_d}\tilde{u}_k\right)\right]$$
$$= \exp\left[\lambda\left[(t_1-t_0)+(t_2-t_1)+\cdots+(t_{k_1}-t_{k_1-1})\right]\left(e^{i\left(\sum\limits_{k=k_1}^{k_d}\tilde{u}_k\right)}-1\right)\right]$$
$$= \exp\left[\lambda\left(t_{k_1}-t_0\right)\left(e^{i\left(\sum\limits_{k=k_1}^{k_d}\tilde{u}_k\right)}-1\right)\right]$$

De manière analogue, en considérant le produit des k_1+1-ème, k_1+2-ème,...,jusqu'au k_2-ème facteur présents dans le produit définissant $\widehat{\phi_{I,J}(\mu_I)}(v)$ (relation (3.13)), nous avons :

$$\exp\left[\lambda(t_{k_1+1}-t_{k_1})\times T\left(\sum_{k=k_1+1}^{n}\tilde{u}_k\right)\right]\times\cdots\times\exp\left[\lambda(t_{k_2}-t_{k_2-1})T\left(\sum_{k=k_2}^{n}\tilde{u}_k\right)\right]$$
$$=\exp\left[\lambda\left(t_{k_2}-t_{k_1}\right)T\left(\sum_{k=k_2}^{k_d}\tilde{u}_k\right)\right]$$

Ainsi de suite, pour j appartenant à $\{2, \cdots, d-1\}$ pour les produits des (k_j+1)-ème, (k_j+2)-ème,..., jusqu'au k_{j+1}-ème facteur présent dans le produit.
De sorte que, grâce aux égalités de sommes dans (3.14) :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\phi_{I,J}(\mu_I)}(v)\\
=&\exp\left[\lambda\left(t_{k_1}-t_0\right)T\left(\sum_{k=k_1}^{k_d}\tilde{u}_k\right)\right]\exp\left[\lambda\left(t_{k_2}-t_{k_1}\right)T\left(\sum_{k=k_2}^{k_d}\tilde{u}_k\right)\right]\cdots\exp\left[\lambda\left(t_{k_d}-t_{k_{d-1}}\right)T(\tilde{u}_{k_d})\right]\\
=&\exp\left[\lambda\left(t_{k_1}-t_0\right)T\left(\sum_{j=1}^{d}v_j\right)\right]\exp\left[\lambda\left(t_{k_2}-t_{k_1}\right)T\left(\sum_{j=2}^{d}v_j\right)\right]\cdots\exp\left[\lambda\left(t_{k_d}-t_{k_{d-1}}\right)T(v_d)\right]\\
=&\widehat{\mu_J}(v).
\end{aligned}\tag{3.15}$$

La dernière relation (3.15) prouve que la famille $(\mu_I)_{I\in\mathbb{R}_+^{(\mathbb{N}^*)}}$ est cohérente. Le Théorème 1.4 de consistance de Kolmogorov donne l'existence et l'unicité à équivalence près du processus de cette proposition. Les accroissements de ce processus sont alors indépendants et stationnaires par construction.

Définition 3.23 *Soit $\lambda>0$. Le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ construit dans le Théorème 3.22 est appelé : <u>processus de Poisson canonique d'intensité λ</u>.*

Remarque 3.24 Cette caractérisation nous permet de démontrer le lemme de Ross qui nous sera utile.

Lemme 3.25 (Ross, 1985) *Soient $(N_1(t))_{t\geq 0}, (N_2(t))_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda_1>0, \lambda_2>0$.*
Si $(N(t))_{t\geq 0}$ est le processus superposé $(N_1(t)+N_2(t))_{t\geq 0}$, alors $(N(t))_{t\geq 0}$ est aussi un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1+\lambda_2$.

Preuve du lemme 3.25 : Nous allons prouver les hypothèses du Théorème 3.22
Soit $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ Et soient $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$.
Alors :

$$\begin{cases} N_1(t_1), N_1(t_2) - N_1(t_1), \ \cdots, N_1(t_n) - N_1(t_{n-1}) \text{ sont indépendantes,} \\ N_2(t_1), N_2(t_2) - N_2(t_1), \ \cdots, N_2(t_n) - N_2(t_{n-1}) \text{ sont indépendantes.} \end{cases}$$

Mais comme $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ sont des processus indépendants alors également :

$$\begin{cases} N_2(t_1) \text{ est indépendante de : } N_1(t_1), N_1(t_2) - N_1(t_1), \ \cdots, N_1(t_n) - N_1(t_{n-1}), \\ N_1(t_1) \text{ est indépendante de : } N_2(t_1), N_2(t_2) - N_2(t_1), \ \cdots, N_2(t_n) - N_2(t_{n-1}). \end{cases}$$

Donc : $N_1(t_1) + N_2(t_2)$ est indépendante de : $N_1(t_2) - N_1(t_1), \ \cdots, N_1(t_n) - N_1(t_{n-1})$.
Puis de : $N_1(t_2) - N_2(t_1), \ \cdots, N_2(t_n) - N_2(t_{n-1})$. Donc également de :

$$N_1(t_2) + N_2(t_2) - [N_1(t_1) + N_2(t_1)], \ \cdots, N_1(t_n) + N_2(t_n) - [N_1(t_{n-1}) + N_2(t_{n-1})]$$

Soit $1 \leq i \leq n-1$, alors $N_1(t_{i+1}) - N_1(t_i)$ est indépendante des variables : $N_1(t_{j+1}) - N_1(t_j)$, pour tout j appartenant à $\{1, \ \cdots, n-1\}$ et différent d'i.
Et de même : $N_2(t_{i+1}) - N_2(t_i)$ est indépendante des variables : $N_2(t_{j+1}) - N_2(t_j)$, pour tout j appartenant à $\{1, \ \cdots, n-1\}$ et différent d'i.
Les processus $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ étant indépendants, alors :
$N_1(t_{i+1}) - N_1(t_i)$ est indépendante des variables $N_2(t_{j+1}) - N_2(t_j)$, pour tout j appartenant à $\{1, \ \cdots, n-1\}$.
Et de même $N_2(t_{i+1}) - N_2(t_i)$ est indépendante des variables $N_1(t_{j+1}) - N_1(t_j)$, pour tout j appartenant à $\{1, \ \cdots, n-1\}$.
Donc la variable :

$$N_1(t_{i+1}) - N_1(t_i) + N_2(t_{i+1}) - N_2(t_i) = [N_1(t_{i+1}) + N_2(t_{i+1})] - [N_1(t_i) + N_2(t_i)]$$

est indépendante des variables : $[N_1(t_{j+1}) + N_2(t_{j+1})] - [N_1(t_j) + N_2(t_j)]$, pour tout j appartenant à $\{1, \ \cdots, n-1\}$ et différent d'i.
D'autre part : $N_1(t_{i+1}) - N_1(t_i)$ et $N_2(t_{i+1}) - N_2(t_i)$ suivent respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1(t_{i+1} - t_i)), \mathcal{P}(\lambda_2(t_{i+1} - t_i))$ et sont indépendantes.
Alors : $[N_1(t_{i+1}) + N_2(t_{i+1})] - [N_1(t_i) + N_2(t_i)]$ suit la loi $\mathcal{P}((\lambda_1 + \lambda_2)(t_{i+1} - t_i))$.
Donc, d'après le Théorème 3.22, $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.

$\square$

3.2.2 Construction à l'aide de la notion d'instants d'arrivée

Proposition 3.26 *Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et considérons la fonction d_n définie pour tout $(x_1, \cdots, x_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$ par :*

$$d_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{n!}{(b-a)^n} \mathbb{1}_{(a<x_1<\cdots<x_n<b)}(x_1, \ldots, x_n). \tag{3.16}$$

Alors, la fonction d_n est une densité sur $\mathbb{R}^n$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve de la proposition 3.26 : Cette fonction est mesurable positive. Et nous avons, grâce au théorème de Tonelli, pour tout $(x_1, \cdots, x_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} d_n(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n =& \frac{n!}{(b-a)^n} \int_a^b \int_{x_1}^b \int_{x_2}^b \cdots \int_{x_{n-1}}^b \mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 \\
=& \frac{n!}{(b-a)^n} \int_a^b \int_{x_1}^b \int_{x_2}^b \cdots \int_{x_{n-2}}^b (b - x_{n-1}) \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 \\
=& \frac{n!}{(b-a)^n} \int_a^b \int_{x_1}^b \int_{x_2}^b \cdots \int_{x_{n-3}}^b \frac{1}{2}(b - x_{n-2}) \mathrm{d}x_{n-2} \cdots \mathrm{d}x_1 \\
=& \frac{n!}{(b-a)^n} \int_a^b \int_{x_1}^b \int_{x_2}^b \cdots \int_{x_{n-4}}^b \frac{1}{3!}(b - x_{n-3})^2 \mathrm{d}x_{n-2} \cdots \mathrm{d}x_1 \\
=& \cdots = \frac{n!}{(b-a)^n} \int_a^b \frac{1}{(n-1)!}(b - x_1)^{n-1} \mathrm{d}x_1 = 1.
\end{aligned}$$

□

Définition 3.27 *Soit n un entier naturel non nul.*
Et soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Le vecteur aléatoire $(X_1, \cdots, X_n)$ suit la loi de Dirichlet d'ordre n sur un intervalle $[a, b]$, que l'on note $\mathcal{D}_n([a, b])$, si ce vecteur admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, la fonction d_n définie dans la relation (3.16) de la Proposition 3.26.

Notons r la fonction rangement : $r : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}) \end{cases}$, où les $x_{(k)}$ sont les réels x_k rangés dans l'ordre croissant. C'est-à-dire les réels définis par :

$$\begin{cases} \{x_1, \cdots, x_n\} = \{x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}\} \\ x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)} \end{cases}.$$

Nous allons présenter dans la proposition suivante un lien entre les lois uniformes et les lois de Dirichlet.

Proposition 3.28 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Et soient , pour un entier naturel non nul n, $U_1, \cdots, U_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées suivant toutes la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$. Considérons $U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)}$ leur arrangement par ordre croissant.*
Ainsi nous avons : $(U_{(1)}, \cdots, U_{(n)}) = r(U_1, \cdots, U_n)$.
Alors le vecteur aléatoire $\left(U_{(1)}, \cdots, U_{(n)}\right)$ suit la loi $\mathcal{D}_n([a,b])$.

Preuve de la proposition 3.28 :
Soit $A_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}$.
Considérons $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$.
A chaque σ appartenant à $\mathcal{S}_n$, on considère $R_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$.
Alors nous avons l'égalité :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} R_\sigma^{-1}(A_n). \tag{3.17}$$

Le vecteur aléatoire $(U_1, \cdots, U_n)$ a comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle λ_n, la fonction f_n qui à $(x_1, \cdots, x_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$ associe :

$$f_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(b-a)^n} \mathbb{1}_{[a,b]^n}(x_1, \cdots, x_n).$$

Soit maintenant une fonction g mesurable bornée sur $\mathbb{R}^n$, on a alors, par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left[g\left(U_{(1)}, \cdots U_{(n)}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^n} (g \circ r)(x_1, \cdots, x_n) f_n(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}\lambda_n(x_1, \cdots, x_n).$$

Notons $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, alors l'égalité (3.17) implique :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g\left(U_{(1)}, \cdots U_{(n)}\right)\right] &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_{R_\sigma^{-1}(A_n)} (g \circ r)(\underline{x}) f_n(\underline{x}) \mathrm{d}\lambda_n(\underline{x}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n}\left(R_\sigma(\underline{x})\right) (g \circ r)(\underline{x}) f_n(\underline{x}) \mathrm{d}\lambda_n(\underline{x}). \end{aligned}$$

Dans chaque intégrale : $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n}\left(R_\sigma(\underline{x})\right) (g \circ r)(\underline{x}) f_n(\underline{x}) \mathrm{d}\lambda_n(\underline{x})$, on effectue alors le changement de variable : $\underline{y} = R_\sigma(\underline{x})$, R_σ étant une isométrie, le jacobien est ± 1, alors :

$$\mathbb{E}\left[g\left(U_{(1)}, \cdots, U_{(n)}\right)\right] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n}(\underline{y}) (g \circ r)\left(R_\sigma^{-1}(\underline{y})\right) f_n\left(R_\sigma^{-1}(\underline{y})\right) \mathrm{d}\lambda_n(\underline{y}). \tag{3.18}$$

Or les fonctions $g \circ r$ et f_n sont invariante par R_σ^{-1}, alors les intégrales présentes dans (3.18) sont indépendantes de la permutation σ choisie. Et donc :

$$\mathbb{E}\left[g\left(U_{(1)},\ \cdots, U_{(n)}\right)\right] = n! \int_{A_n} (g \circ r)(\underline{y}) f_n(\underline{y}) \mathrm{d}\lambda_n(\underline{y}). \tag{3.19}$$

De la relation (3.19), et de l'expression de f_n, la densité du vecteur aléatoire $(U_{(1)},\ \cdots, U_{(n)})$ est, pour $\underline{x} = (x_1,\ \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, égale à :

$$f_{(U_{(1)},\ \cdots, U_{(n)})}(\underline{x}) = \frac{n!}{(b-a)^n} \mathbb{1}_{(0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq b)}(\underline{x}),$$

qui est bien la densité d_n de la loi de Dirichlet $\mathcal{D}_n([a, b])$. □

Voici à présent une proposition liant les lois gamma et les lois de Dirichlet.

Proposition 3.29 *Soient, pour un entier naturel non nul n, les variables aléatoires $e_1,\ \cdots, e_n$ indépendantes identiquement distribuées suivant toute la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, pour un certain $\lambda > 0$. Et considérons la variable Γ_n égale à $\sum_{k=1}^{n} e_k$.*
Alors :

i) Γ_n suit la loi $\gamma(n, \lambda)$.
ii) Pour tout t réel strictement positif, la loi du vecteur $(\Gamma_1,\ \cdots, \Gamma_n)$ sachant $(\Gamma_{n+1} = t)$ est $\mathcal{D}_n([0, t])$.
iii) Pour tout t réel positif ou nul, la loi du vecteur $(\Gamma_1,\ \cdots, \Gamma_n)$ sachant $(\Gamma_n \leq t \leq \Gamma_{n+1})$ est $\mathcal{D}_n([0, t])$.

Remarque 3.30 Les variables Γ_j sont appelés instants d'arrivée.

Preuve de la proposition 3.29 :

i) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Nous avons :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\Gamma_1,\ \cdots, \Gamma_n\right)\right] = \mathbb{E}\left[f(e_1, e_1 + e_2,\ \cdots, e_1 + \cdots + e_n)\right].$$

Or les e_k pour tout k appartenant à $\{1,\ \cdots, n\}$ étant indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors nous connaissons la densité φ du vecteur $(e_1, \cdots, e_n)$, qui est, pour tout $\underline{x} = (x_1,\ \cdots, x_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, égale à :

$$\varphi(\underline{x}) = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^n}(\underline{x}).$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\Gamma_1,\ \cdots,\Gamma_n\right)\right]=\lambda^n\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x_1,x_1+x_2,\ \cdots,x_1+\cdots+x_n)e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_n)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n. \tag{3.20}$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} t_1 = x_1, \\ t_2 = x_1 + x_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ t_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \end{cases}$$

Nous avons alors : $(x_1,\ \cdots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n \Longleftrightarrow 0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n$. La valeur absolue du jacobien de ce changement est 1. La relation (3.20) devient :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\Gamma_1,\ \cdots,\Gamma_n\right)\right]=\lambda^n\int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1,t_2,\ \cdots,t_n)e^{-\lambda t_n}\mathbb{1}_{(0\le t_1\le\cdots\le t_n)}(t_1,\ \cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n. \tag{3.21}$$

Ainsi changeant t_n par t, la densité de g_n de Γ_n est, grâce au théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lambda^n e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{(0\le t_1\le\cdots\le t_{n-1}\le t)}(t_1,\ \cdots,t_{n-1})\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\ \int_0^t\int_0^{t_{n-1}}\int_0^{t_{n-2}}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{n-1} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\ \int_0^t\int_0^{t_{n-1}}\int_0^{t_{n-2}}\cdots\int_0^{t_3} t_2\ \mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{n-1} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\ \int_0^t\int_0^{t_{n-1}}\int_0^{t_{n-2}}\cdots\int_0^{t_4} \frac{t_3^2}{2}\ \mathrm{d}t_3\cdots\mathrm{d}t_{n-1} \\ &= \cdots = \lambda^n e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\int_0^t \frac{t_{n-1}^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{d}t_{n-1} = \lambda^n e^{-\lambda t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t), \end{aligned}$$

qui est bien la densité de la loi $\gamma(n,\lambda)$.

ii) La densité $f_{(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n)|\Gamma_{n+1}=t}$ est, pour tout $(t_1,\ \cdots,t_n)$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f_{(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n)|\Gamma_{n+1}=t}\ (t_1,\ \cdots,t_n) &= \frac{\lambda^{n+1}e^{-\lambda t}}{\dfrac{\lambda^{n+1}t^n e^{-\lambda t}}{n!}}\ \mathbb{1}_{(0\le t_1\le\cdots\le t_n\le t)}(t_1,\cdots,t_n) \\ &= \frac{n!}{t^n}\ \mathbb{1}_{(0\le t_1\le\cdots\le t_n\le t)}(t_1,\cdots,t_n), \end{aligned}$$

qui est bien la densité d_n de la loi $\mathcal{D}_n([0,t])$.

iii) Soit A dans $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$\mathbb{P}\left[(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n) \in A \mid (\Gamma_n \leq t \leq \Gamma_{n+1})\right] = \frac{\mathbb{P}\left[((\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n) \in A) \cap (\Gamma_n \leq t \leq \Gamma_{n+1})\right]}{\mathbb{P}\left[\Gamma_n \leq t \leq \Gamma_{n+1}\right]}. \tag{3.22}$$

La relation (3.21) nous permet d'expliciter la densité du vecteur $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n+1})$, qui est, pour tout $(t_1, \cdots, t_{n+1})$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, égale à :

$$f_{(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n+1})}(t_1, \cdots, t_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathbb{1}_{(0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n+1})}(t_1, \ \cdots, t_{n+1}). \tag{3.23}$$

Dès lors, grâce au théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\Gamma_n \leq t \leq \Gamma_{n+1}\right] &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathbb{1}_{(0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t \leq t_{n+1})}(t_1, \ \cdots, t_{n+1}) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n+1} \\ &= \lambda^{n+1} \int_t^{+\infty} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathrm{d}t_{n+1} \times \int_0^{t_1} \int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t} \mathrm{d}t_n \mathrm{d}t_{n-1} \cdots \mathrm{d}t_1 \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t} \times \frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

D'autre part, encore grâce au théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[((\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n) \in A) \cap (\Gamma_n \leq t \leq \Gamma_{n+1})\right] \\ &= \int_A \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathbb{1}_{(0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t \leq t_{n+1})}(t_1, \ \cdots, t_{n+1}) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n+1} \\ &= \lambda^{n+1} \int_t^{+\infty} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathrm{d}t_{n+1} \times \int_A \mathbb{1}_{(0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t)}(t_1, \ \cdots, t_n) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t} \times \int_A \mathbb{1}_{(0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t)}(t_1, \ \cdots, t_n) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ainsi grâce aux égalités (3.24) et (3.25), l'égalité (3.22) devient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n) \in A \mid (\Gamma_n \leq t \leq \Gamma_{n+1})\right] \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{\lambda^n e^{-\lambda t} \times \frac{t^n}{n!}} \times \int_A \mathbb{1}_{(0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t)}(t_1, \ \cdots, t_n) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_A \mathbb{1}_{(0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t)}(t_1, \ \cdots, t_n) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer.

□

Voici un corollaire qui nous sera utile :

Corollaire 3.31 *Avec les mêmes notations que la Proposition 3.29, le vecteur* $\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_{n+1}}, \ \cdots, \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n+1}}\right)$ *suit la loi* $\mathcal{D}_n([0, 1])$.

Preuve du corollaire 3.31 : En reprenant la densité de la relation (3.21), si f désigne une fonction positive définie sur $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_{n+1}},\ \cdots,\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n+1}}\right)\right]$$
$$=\int_{\mathbb{R}_*+}\lambda^{n+1}e^{-\lambda t_{n+1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\left(\frac{t_1}{t_{n+1}},\ \cdots,\frac{t_n}{t_{n+1}}\right)\mathbb{1}_{(0\leq t_1\leq\cdots\leq t_{n+1})}((t_j)_{1\leq j\leq n+1})\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\right)\mathrm{d}t_{n+1}.$$

Effectuons le changement de variable : $\forall k\in\{1,\ \cdots,n\}:u_k=\dfrac{t_k}{t_{n+1}}$.

Alors, nous avons : $0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}\Longleftrightarrow 0<u_1<\cdots<u_n<1$.

Le jacobien de ce changement de variable est t_{n+1}^n. Donc :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_{n+1}},\ \cdots,\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n+1}}\right)\right]$$
$$=\int_{\mathbb{R}_{*+}}\lambda^{n+1}t_{n+1}^ne^{-\lambda t_{n+1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\left(u_1,\ \cdots,u_n\right)\mathbb{1}_{(0\leq u_1\leq\cdots\leq u_n<1)}((u_j)_{1\leq j\leq n})\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\right)\mathrm{d}t_{n+1}.$$
$$=\left(\int_{\mathbb{R}_{*+}}\lambda^{n+1}t_{n+1}^ne^{-\lambda t_{n+1}}\mathrm{d}t_{n+1}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\left(u_1,\ \cdots,u_n\right)\mathbb{1}_{(0\leq u_1\leq\cdots\leq u_n<1)}((u_j)_{1\leq j\leq n})\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\right).$$

Or, nous reconnaissons la loi gamma $\gamma(n+1,\lambda)$ dans la première intégrale, de sorte que :

$$\int_{\mathbb{R}_{*+}}\lambda^{n+1}t_{n+1}^ne^{-\lambda t_{n+1}}\mathrm{d}t_{n+1}=(n+1)!$$

Et donc, finalement :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_{n+1}},\ \cdots,\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n+1}}\right)\right]=(n+1)!\times\int_{\mathbb{R}^n}f\left(u_1,\ \cdots,u_n\right)\mathbb{1}_{(0\leq u_1\leq\cdots\leq u_n<1)}((u_j)_{1\leq j\leq n})\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n.$$

Nous reconnaissons la densité d_n de la loi $\mathcal{D}_n([0,1])$. □

De cette étude, nous obtenons donc une nouvelle construction d'un processus de Poisson :

Proposition 3.32 *Reprenons les mêmes notations que la Proposition 3.29.*
Et posons, pour tout $t\geq 0$: $P_t=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{1}_{(\Gamma_n\leq t)}$. Et considérons le processus $(P_t)_{t\geq 0}$.
Alors ce processus est un processus de Poisson d'intensité λ.

Preuve de la proposition 3.32 : Tout d'abord, pour tout $t\geq 0$, fixé, P_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.
En effet, pour tout entier naturel k, sachant que la loi du vecteur $(\Gamma_1,\ \cdots,\Gamma_{k+1})$: est, pour tout $(t_1,\ \cdots t_{k+1})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ égale à : $\lambda^{k+1}e^{-\lambda t_{k+1}}\mathbb{1}_{(0<t_1\leq\cdots<t_{k+1})}((t_j)_{j\in\{1,\ \cdots,k+1\}}$, et grâce au théorème de Tonelli :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(P_t = k) &= \mathbb{P}(\Gamma_k \leq t < \Gamma_{k+1}) \\
&= \lambda^{k+1} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} e^{-\lambda t_{k+1}} \mathbb{1}_{0<t_1\leq \cdots < t_{k+1}}((t_j)_{j\in\{1,\ \cdots,k+1\}}) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{k+1} \\
&= \lambda^{k+1} \int_0^t \int_{t_1}^t \cdots \int_{t_{k-1}}^t \int_t^{+\infty} e^{-\lambda t_{k+1}} \mathrm{d}t_{k+1} \mathrm{d}t_k \cdots \mathrm{d}t_1 \\
&= \lambda^{k+1} \int_0^t \int_{t_1}^t \cdots \int_{t_{k-1}}^t \ e^{-\lambda t} \mathrm{d}t_k \cdots \mathrm{d}t_1 \\
&= \ \cdots = \lambda^k e^{-\lambda t} \frac{t^k}{k!},
\end{aligned}
$$

ce qu'il fallait trouver. Nous allons maintenant calculer les lois fini-dimensionnelles du processus $(P_t)_{t\geq 0}$. Soit un entier naturel n non nul, et soient $s_1 \leq \cdots \leq s_n$ des entiers naturels. Soient $0 \leq t_1 < \cdots < t_n = t$ des réels positifs.
Considérons : $k_1 = s_1, k_2 = s_2 - s_1, \ \cdots, k_n = s_n - s_{n-1}$. Alors, sachant que $N_0 = 0$, $\mathbb{P}$-presque sûrement, en posant $t_0 = 0$.

$$
\mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^n (P_{t_j} = s_j)\right] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^n (P_{t_j} - P_{t_{j-1}} = k_j)\right].
$$

Notons que : $\bigcap_{j=1}^n (P_{t_j} - P_{t_{j-1}} = k_j) \subset (P_{t_n} = s_n)$. Donc :

$$
\begin{aligned}
\bigcap_{j=1}^n (P_{t_j} - P_{t_{j-1}} = k_j) &= (P_{t_n} = s_n) \cap \left[\bigcap_{j=1}^n (P_{t_j} - P_{t_{j-1}} = k_j)\right] \\
&= (P_{t_n} = s_n) \cap \left[\bigcap_{j=1}^n (P_{t_j} = s_j)\right] = (P_{t_n} = s_n) \cap \left[\bigcap_{j=1}^n (\Gamma_{s_j} \leq t_j < \Gamma_{s_j+1})\right].
\end{aligned}
$$

D'après la Proposition 3.29 (iii), la loi du vecteur $(\Gamma_1, \ \cdots, \Gamma_{s_1}, \Gamma_{s_1+1}, \ \cdots, \Gamma_{s_n})$ sachant l'évènement $(P_{t_n} = s_n) = (P_t = s_n) = (\Gamma_{s_n} \leq t < \Gamma_{s_n+1})$ est la loi de Dirichlet $\mathcal{D}_{s_n}([0,t])$.

Donc, en posant $s_0 = 0$:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^{n}(P_{t_j} - P_{t_{j-1}} = k_j)\right]$$
$$= \mathbb{P}[P_t = s_n] \times \mathbb{P}_{(P_t = s_n)}\left[\bigcap_{j=1}^{n}(P_{t_j} - P_{t_{j-1}} = k_j)\right]$$
$$= \frac{\lambda^{s_n} t^{s_n} e^{-\lambda t}}{s_n!} \times \mathbb{P}_{(P_t = s_n)}\left[\bigcap_{j=1}^{n}(\Gamma_{s_j} \leq t_j < \Gamma_{s_j+1})\right]$$
$$= \frac{t^{s_n} s_n!}{t^{s_n} s_n!}\lambda^{s_n} e^{-\lambda t}\int_{\mathbb{R}^{s_n}}\left(\prod_{j=1}^{n}\mathbb{1}_{(x_{s_j} \leq t_j < x_{s_j+1})}(x_{s_j}, x_{s_j+1})\right)\mathbb{1}_{0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{s_n} \leq t}(x_1, \ \cdots, x_{s_n})\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{s_n}$$
$$= \lambda^{s_n} e^{-\lambda t}\int_{\mathbb{R}^{s_n}}\mathbb{1}_{(t_0 \leq x_1 \leq \cdots x_{s_1} \leq t_1 < x_{s_1+1} \leq \cdots \leq x_{s_2} \leq t_2 < x_{s_2+1} \leq \cdots \ldots \leq x_{s_n} \leq t)}((x_j)_{1 \leq j \leq s_n})\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{s_n}$$
$$= \lambda^{s_n} e^{-\lambda t}\prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^{k_j}}\mathbb{1}_{(t_{j-1} \leq x_{s_{j-1}+1} \leq \cdots x_{s_j} \leq t_j)}((x_m)_{s_{j-1}+1 \leq m \leq s_j})\mathrm{d}x_{s_{j-1}+1} \cdots \mathrm{d}x_{s_j}$$
$$= \lambda^{s_n} e^{-\lambda t_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(t_j - t_{j-1})^{k_j}}{k_j!},$$

les calculs présents dans le produit étant encore des intégrales itérées déjà rencontrées.
Or : $\lambda^{s_n} = \lambda^{k_1} \times \cdots \times \lambda^{k_n}$, et : $e^{-\lambda t_n} = e^{-\lambda(t_1 - t_0)} \times \cdots \times e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}$, et finalement :

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^{n}(P_{t_j} - P_{t_{j-1}} = k_j)\right] = \prod_{j=1}^{n}\frac{[\lambda(t_j - t_{j-1})]^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})},$$

ce qui démontre que les $P_{t_j} - P_{t_{j-1}}$, pour j compris entre 1 et n sont indépendantes et suivent respectivement la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda(t_j - t_{j-1}))$. Le Théorème 3.22 permet ainsi de conclure.
□

Remarque 3.33 P_t compte le nombre de Γ_j qui sont inférieurs ou égaux à t.

3.3 Série de Le Page pour une variable α-stable symétrique

Proposition 3.34 *Soit $(\Gamma_j)_{j \geq 1}$ la suite des instants d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité égale à 1. Et soit $(R_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes de $(\Gamma_j)_{j \geq 1}$.*
Si $\sum_{j \geq 1}\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}R_j$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement, alors elle converge vers une variable aléatoire α-stable.

Preuve de la proposition 3.34 : Soit X la limite presque sûre de cette série. Alors elle est mesurable et soient :

$$X' = \sum_{j=1}^{+\infty} (\Gamma'_j)^{-\frac{1}{\alpha}} R'_j, X'' = \sum_{j=1}^{+\infty} (\Gamma''_j)^{-\frac{1}{\alpha}} R''_j,$$

où $(\Gamma'_j)_{j\geq 1}, (R'_j)_{j\geq 1}, (\Gamma''_j)_{j\geq 1}, (R''_j)_{j\geq 1}$ sont des copies indépendantes de $(\Gamma_j)_{j\geq 1}, (R_j)_{j\geq 1}$. Soient $A, B > 0$ tels que $A^\alpha + B^\alpha = 1$. Alors :

$$AX' + BX'' = \sum_{j=1}^{+\infty} (A^{-\alpha}\Gamma'_j)^{-\frac{1}{\alpha}} R'_j + \sum_{j=1}^{+\infty} (B^{-\alpha}\Gamma''_j)^{-\frac{1}{\alpha}} R''_j \text{ a la même loi que } X = \sum_{j=1}^{+\infty} \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} R_j.$$

En effet, tout d'abord $(A^{-\alpha}\Gamma'_j)_{j\geq 1}$ est la suite des instants d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité A^α car pour tout réel x et pour tout entier $j \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left[A^{-\alpha}(\Gamma'_{j+1} - \Gamma'_j) > x\right] = \mathbb{P}(\Gamma'_{j+1} - \Gamma'_j > A^\alpha x) = e^{-A^\alpha x},$$

car $\Gamma_{j+1} - \Gamma_j$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, ce qui montre que $A^{-\alpha}(\Gamma'_{j+1} - \Gamma'_j)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(A^\alpha)$.
Et pour tous entiers non nuls k et j tels que $k \neq j$: $A^{-\alpha}(\Gamma'_{k+1} - \Gamma'_k) \perp\!\!\!\perp A^{-\alpha}(\Gamma'_{j+1} - \Gamma'_j)$.
De même, $(B^{-\alpha}\Gamma''_j)_{j\geq 1}$ est la suite des temps d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité B^α.
Nous superposons ces deux processus de Poisson, grâce au Lemme 3.25, le résultat sera encore un processus de Poisson d'intensité : $A^\alpha + B^\alpha = 1$.
Si $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$ sont les instants d'arrivée du processus superposé, alors chaque Γ_j est soit $A^{-\alpha}\Gamma'_m$ soit $B^{-\alpha}\Gamma''_n$, pour un certain $m \geq 1$ ou un certain $n \geq 1$.
Soit :

$$R_i = \begin{cases} R'_m, \text{ si : } \Gamma_j = A^{-\alpha}\Gamma'_m \\ R''_n, \text{ si : } \Gamma''_j = B^{-\alpha}\Gamma''_n \end{cases}$$

Les R_j sont indépendants et identiquement distribuées, alors en fait :

$$(A^{-\alpha}\Gamma'_n)^{-\frac{1}{\alpha}} R'_n + (B^{-\alpha}\Gamma''_n)^{-\frac{1}{\alpha}} R''_n \text{ suit la loi que : } (A^\alpha + B^\alpha) \times (\Gamma_n)^{-\frac{1}{\alpha}} R_n = \Gamma_n^{-\frac{1}{\alpha}} R_n.$$

D'où le résultat. □

Remarque 3.35 Cette proposition suggère qu'une variable aléatoire X stable peut être représentée comme la somme d'une série de ce type. Il est néanmoins nécessaire d'ajouter des hypothèses sur α et sur la loi de R_i afin d'avoir une série convergente presque sûrement. En fait, nous allons considérer $R_j = \varepsilon_j W_j$, où $\varepsilon_j = \pm 1$ est la variable aléatoire indépendante de W_j. La dernière proposition motive le théorème suivant.

Théorème 3.36 *Soient les suites de variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *:*

- $(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées toutes de loi de Rademacher* $\mathcal{R}$.
- $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$ *où* Γ_j *désigne le* j*-ème instant d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité 1.*
- $(W_j)_{j\geq 1}$*, où les* W_j *indépendantes identiquement distribuées et possèdant un moment d'ordre* α.

On suppose $(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$*,* $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$ *et* $(W_j)_{j\geq 1}$ *indépendantes les unes des autres.*
Alors :

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \ \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j \xrightarrow[\mathbb{P}-ps]{n\to+\infty} X,$$

où X *a comme loi* $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$*, et où :*

$$\sigma = \left[c_\alpha^{-1} \ \mathbb{E}(|W_1|^\alpha)\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{3.26}$$

où c_α *est la constante rencontrée dans la Proposition 1.9.*

Preuve du théorème 3.36 : La démonstration de ce théorème est présente dans le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2], j'ai apporté des éléments supplémentaires pour en éclaircir des zones d'ombre.

Etape 1 : Soit $(U_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables indépendantes identiquement distribuées suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(]0,1[)$, et indépendante des suites $(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$ et $(W_j)_{j\geq 1}$.
Et considérons pour $j \geq 1$: $Y_j = \varepsilon_j U_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j$.
Ainsi grâce à la multiplication par ε_j, les Y_j sont indépendantes identiquement distribuées symétriques. En effet, pour la symétrie, comme : $U_j \perp\!\!\!\perp W_j \perp\!\!\!\perp \varepsilon_j$, en passant par les fonctions caractéristiques, pour tout t réel :

$$\begin{aligned}\psi_{Y_j}(t) =& \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \int_\Omega \left(e^{itu^{-\frac{1}{\alpha}} W_j(\omega)} + e^{-itu^{-\frac{1}{\alpha}} W_j(\omega)}\right) \mathrm{d}u \ \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\right] \\ =& \ \psi_{(-Y_j)}(t).\end{aligned}$$

Et pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(|Y_1| > \lambda) = \mathbb{P}\left(U_1^{-\frac{1}{\alpha}} |W_1| > \lambda\right) = \mathbb{P}\left(U_1 < \lambda^{-\alpha} |W_1|^\alpha\right). \tag{3.27}$$

Or, nous avons, grâce à l'indépendance de U_1 et W_1, et au théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(U_1 < \lambda^{-\alpha}|W_1|^\alpha\right) &= \mathbb{P}\left(U_1 - \lambda^{-\alpha}|W_1|^\alpha < 0\right) \\
&= \int_0^1 \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(u - \lambda^{-\alpha}w^\alpha) \mathrm{d}\mathbb{P}_{U_1}(u) \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w) \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(u - \lambda^{-\alpha}w^\alpha) \mathrm{d}\mathbb{P}_{U_1}(u)\right) \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w) \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(U_1 - \lambda^{-\alpha}w^\alpha)\right] \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w) \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{]-\infty,\lambda^{-\alpha}w^\alpha]}(U_1)\right] \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w) \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(U_1 < \lambda^{-\alpha}w^\alpha\right) \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ainsi, en combinant (3.27) et (3.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y_1| > \lambda) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(U_1 < \lambda^{-\alpha}x^\alpha) \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(x) \\
&= \int_0^{\lambda} \mathbb{P}(U_1 < \lambda^{-\alpha}x^\alpha) \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(x) + \int_\lambda^{+\infty} \mathbb{P}(U_1 < \lambda^{-\alpha}x^\alpha) \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(x) \\
&= \int_0^{\lambda} \lambda^{-\alpha}x^\alpha \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(x) + \int_\lambda^{+\infty} 1 \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(x) \\
&= \lambda^{-\alpha} \int_0^{\lambda} x^\alpha \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(x) + \mathbb{P}(|W_1| > \lambda).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Donc :

$$\lambda^\alpha \mathbb{P}(|Y_1| > \lambda) = \int_0^{\lambda} x^\alpha \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(x) + \lambda^\alpha \mathbb{P}(|W_1| > \lambda). \tag{3.30}$$

Par convergence monotone, d'une part :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\lambda} x^\alpha \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(x) = \mathbb{E}(|W_1|^\alpha). \tag{3.31}$$

Et d'autre part, puisque : $\lambda^\alpha \mathbb{P}(|W_1| > \lambda) \leq \int_\Omega |W_1|^\alpha \mathbb{1}_{\{|W_1| > \lambda\}} \mathrm{d}\mathbb{P}$:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^\alpha \mathbb{P}(|W_1| > \lambda) = 0. \tag{3.32}$$

(3.31), (3.32) et (3.30) donne alors :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^\alpha \mathbb{P}(|Y_1| > \lambda) = \mathbb{E}(|W_1|^\alpha), \tag{3.33}$$

Donc Y_1 vérifie le Corollaire 3.19 avec $h(x) = 1$, et $c = \mathbb{E}(|W_1|^\alpha)$ ce qui donne d'après le Théorème limite 3.20 (Y_1 étant symétrique) :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X, \text{ où : } X \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, 0, 0), \text{ pour : } \sigma > 0.$$

Soit la constante $c_\alpha > 0$ de la relation (3.26) soit : $\sigma = \left[c_\alpha^{-1} \mathbb{E}\left(W_i^\alpha\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$.
Nous avons : $\lim_{t\to 0^+} t^{-\alpha}(1 - \phi_X(t)) = \sigma^\alpha$.
En effet : $\phi_X(t) = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha}$, donc :

$$1 - \phi_X(t) = \sigma^\alpha |t|^\alpha - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-\sigma^\alpha |t|^\alpha)^k}{k!} \Longrightarrow \frac{1 - \phi_X(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \sigma^\alpha$$

La limite (de nombres complexes) obtenue étant réelle, alors :

$$\lim_{t\to 0^+} \left[\mathfrak{Re}\left(\frac{1 - \phi_X(t)}{t^\alpha}\right)\right] = \sigma^\alpha, \text{ et : } \lim_{t\to 0^+} \left[\mathfrak{Im}\left(\frac{1 - \phi_X(t)}{t^\alpha}\right)\right] = 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\sigma^\alpha &= \lim_{t\to 0^+} \left[\mathfrak{Re}\left(\frac{1 - \phi_X(t)}{t^\alpha}\right)\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\mathfrak{Re}\left(\int_\Omega t^{-\alpha}\left(1 - e^{itX(\omega)}\right) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\right)\right] \\
&= \lim_{t\to 0^+} \int_\Omega t^{-\alpha}[1 - \cos(tX(\omega))] \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \lim_{t\to 0^+} \int_\mathbb{R} t^{-\alpha}[1 - \cos(tx)] \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \qquad (3.34) \\
&= 2 \lim_{t\to 0^+} \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}[1 - \cos(tx)] \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x).
\end{aligned}$$

(La dernière égalité étant déduite de la symétrie de X.)
D'autre part, grâce au théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \sin(v) \left(1 - F\left(\frac{v}{t}\right) t^{-\alpha}\right) \mathrm{d}v &= \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} \sin(v) \int_\Omega \mathbb{1}_{\left(X > \frac{v}{t}\right)}(\omega) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \mathrm{d}v \\
&= \int_\Omega \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} \sin(v) \mathbb{1}_{\left(X > \frac{v}{t}\right)}(\omega) \mathrm{d}v \ \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \int_0^{tX(\omega)} t^{-\alpha} \sin(v) \mathrm{d}v \ \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega [1 - \cos(tX(\omega))] t^{-\alpha} \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega).
\end{aligned} \qquad (3.35)$$

Donc, des derniers calculs (3.34) et (3.35), on déduit :

$$\sigma^\alpha = 2 \lim_{t\to 0^+} \int_0^{+\infty} \sin(v) \left(1 - F\left(\frac{v}{t}\right)\right) t^{-\alpha} dv. \qquad (3.36)$$

Or comme $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^\alpha \mathbb{P}(|X| > \lambda) = c_\alpha \sigma^\alpha$ (Propriété 3.14 (ii)) :

$$\forall v > 0 : \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{v}{t}\right)^\alpha \mathbb{P}\left(|X| > \frac{v}{t}\right) = c_\alpha \sigma^\alpha. \tag{3.37}$$

Et comme $\mathbb{P}\left(|X| > \frac{v}{t}\right) = 2\left(1 - F\left(\frac{v}{t}\right)\right)$ (encore la symétrie), alors on déduit de (3.36) et (3.37) :

$$\lim_{t \to 0^+} t^{-\alpha}\left(1 - F\left(\frac{v}{t}\right)\right) = c_\alpha \sigma^\alpha \times \frac{v^{-\alpha}}{2}.$$

D'où : $\sigma^\alpha = \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v^\alpha} dv\right) \times c_\alpha \sigma^\alpha$. Ce qui donne : $c_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v^\alpha} dv\right)^{-1}$.

<u>Etape 2 :</u> En écrivant $\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{j=1}^n Y_j$ d'une autre manière, nous allons montrer que cette moyenne a une limite ayant la même loi que la somme $\sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j$.

D'après la Proposition 3.29 la loi de $(\Gamma_1, ..., \Gamma_n)$ sachant Γ_{n+1} est la loi de Dirichlet d'ordre n sur $[0, \Gamma_{n+1}]$: $\mathcal{D}_n([0, \Gamma_{n+1}])$.
Et d'après le Corollaire 3.31, la loi de $\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_{n+1}}, \cdots, \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n+1}}\right)$ sachant Γ_{n+1} est $\mathcal{D}_n([0,1])$, qui ne dépend plus de Γ_{n+1}.
Or, d'après la Proposition 3.28, $\mathcal{D}_n([0,1])$ peut être construite via une suite croissante de n variables aléatoires indépendantes $(U_i)_{1 \le i \le n}$, et toutes de loi : $\mathcal{U}([0,1])$.
Nous allons démontrer que les variables aléatoires : $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j$ et $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_{(j)}^{-\frac{1}{\alpha}} W_j$ ont la même loi.

En effet, nous allons montrer l'égalité de leurs fonctions caractéristiques.

Commentaire 3.37 *Le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2] n'écrit pas le détail de ce passage pourtant guère trivial, m'ayant laissé un doute, grâce au travail effectué sur les processus de Poisson, voici l'explication.*

Soit, pour une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ l'évènement :

$$\mathcal{A}_\sigma = \{\omega \in \Omega \mid U_{\sigma(1)}(\omega) < \cdots < U_{\sigma(n)}(\omega)\}.$$

Et considérons l'évènement $\Omega^* = \dot{\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n}} \mathcal{A}_\sigma$, où le symbole $\dot{\bigcup}$ désigne une union disjointe.

Et rappelons les notations : $A_n = \{(x_1,\ \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 <\ \cdots < x_n\}$,

et $R_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1,\ \cdots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)},\ \cdots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$.

Alors, en effectuant le changement $(y_1,\ \cdots, y_n) = R_\sigma^{-1}(x_1,\ \cdots, x_n)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}_\sigma) &= \int_{[0,1]^n} \mathbb{1}_{A_n}(x_{\sigma(1)},\ \cdots, x_{\sigma(n)})\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \int_{[0,1]^n} \mathbb{1}_{A_n}(y_1,\ \cdots, y_n)\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = \mathbb{P}(\mathcal{A}_{\mathrm{Id}}).
\end{aligned}$$

Or, par un calcul d'intégrale itérée déjà rencontrée :

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_{\mathrm{Id}}) = \int_{[0,1]^n} \mathbb{1}_{(0<x_1<\cdots<x_n)}(x_1,\ \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{n!}.$$

Dès lors : $\mathbb{P}(\Omega^*) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}(\mathcal{A}_\sigma) = n! \times \frac{1}{n!} = 1$. Ω^* est alors un évènement $\mathbb{P}$-presque sûr.

Pour t réel, dès lors nous avons :

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left[it\left(\sum_{j=1}^n \epsilon_j U_{(j)}^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\right)\right]\right\} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{E}\left\{\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\sigma} \times \exp\left[it\left(\sum_{j=1}^n \epsilon_j U_{\sigma(j)}^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\right)\right]\right\}. \tag{3.38}$$

Or, grâce au théorème de Fubini, et en notant W le vecteur aléatoire $(W_1,\ \cdots, W_n)$, et par $\mathcal{E}$ le vecteur aléatoire $(\varepsilon_1,\ \cdots, \varepsilon_n)$, $w = \mathbb{R}^n$ $(w_1,\ \cdots, w_n)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $e = (e_1,\ \cdots, e_n)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\sigma} \exp\left[it\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_{\sigma(j)}^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\right)\right]\right\} \\
&= \int_{(\mathbb{R}^n)^3} \mathbb{1}_{A_n}(u_{\sigma(1)},\ \cdots, u_{\sigma(n)}) e^{it\left(\sum_{j=1}^n e_j u_{\sigma(j)}^{-\frac{1}{\alpha}} w_j\right)} \mathrm{d}\lambda_n(u_1,\ \cdots, u_n)\mathrm{d}\mathbb{P}_W(w)\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{E}}(e) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n}(u_{\sigma(1)},\ \cdots, u_{\sigma(n)}) \left[\int_{(\mathbb{R}^n)^2} e^{it\left(\sum_{j=1}^n e_j u_{\sigma(j)}^{-\frac{1}{\alpha}} w_j\right)} \mathrm{d}\mathbb{P}_W(w)\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{E}}(e)\right] \mathrm{d}\lambda_n(u_1,\ \cdots, u_n).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Or, comme les $\varepsilon_j W_j$ sont indépendantes entre elles, les ϵ_j étant indépendantes identiquement distribuées, les W_j également, alors pour tout $(a_1,\ \cdots,\ a_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j W_j \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_{\sigma(j)} W_{\sigma(j)}.$$

Ce qui équivaut à l'égalité des fonctions caractéristiques, c'est-à-dire pour tout réel t :

$$\int_{(\mathbb{R}^n)^2} e^{it\left(\sum_{j=1}^n e_j a_j w_j\right)} \mathrm{d}\mathbb{P}_W(w)\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{E}}(e) = \int_{(\mathbb{R}^n)^2} e^{it\left(\sum_{j=1}^n e_{\sigma(j)} a_j w_{\sigma(j)}\right)} \mathrm{d}\mathbb{P}_W(w)\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{E}}(e). \tag{3.40}$$

En appliquant cette dernière égalité (3.40) à $(a_1, \cdots, a_n) = \left(u_{\sigma(1)}^{-\frac{1}{\alpha}}, \cdots, u_{\sigma(n)}^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$, la relation (3.39) devient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\sigma} \exp\left[it\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_{\sigma(j)}^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\right)\right]\right\}\\
=&\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n}(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(n)}) \left[\int_{(\mathbb{R}^n)^2} e^{it\left(\sum_{j=1}^n e_{\sigma(j)} u_{\sigma(j)}^{-\frac{1}{\alpha}} w_{\sigma(j)}\right)} \mathrm{d}\mathbb{P}_W(w)\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{E}}(e)\right] \mathrm{d}\lambda_n(u_1, \cdots, u_n).\\
=&\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n}(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(n)}) \left[\int_{(\mathbb{R}^n)^2} e^{it\left(\sum_{j=1}^n e_j u_j^{-\frac{1}{\alpha}} w_j\right)} \mathrm{d}\mathbb{P}_W(w)\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{E}}(e)\right] \mathrm{d}\lambda_n(u_1, \cdots, u_n).\\
=&\mathbb{E}\left\{\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\sigma} \exp\left[it\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\right)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

En injectant l'égalité (3.41) dans l'égalité (3.38) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{\exp\left[it\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_{(j)}^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\right)\right]\right\} &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathbb{E}\left\{\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\sigma} \times \exp\left[it\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\right)\right]\right\}.\\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[it\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\right)\right]\right\},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer.

Ainsi on ordonne les U_j de façon croissante. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{j=1}^n Y_j &\overset{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j U_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\\
&\overset{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left(\frac{\Gamma_j}{\Gamma_{n+1}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\\
&\overset{\mathcal{L}}{=} \left(\frac{\Gamma_{n+1}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X,
\end{aligned}$$

où $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ grâce à l'étape 1.

Etape 3 : Il nous reste à démontrer que la série $\sum_{j\geq 1} \varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement, la limite sera X, la même limite que celle en loi.

Pour tout $n \geq 1$, Γ_n est une somme de n variables e_k indépendantes suivant toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Par la loi forte des grands nombres : $\dfrac{\Gamma_n}{n}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $\mathbb{E}(e_1) = 1$.

Alors $\dfrac{\Gamma_{n+1}}{n} = \dfrac{\Gamma_{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n}$ converge encore $\mathbb{P}$-presque sûrement vers 1.

Ainsi l'évènement $\widetilde{\Omega} = \left\{ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\Gamma_n}{n} = 1 \right\} \cap \{\Gamma_1 > 0\}$ est $\mathbb{P}-$presque sûr. Nous allons prouver que $\sum_{j\geq 1} \varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j$ converge sur $\widetilde{\Omega}$.

Rappelons que si Y est une variable aléatoire réelle sur Ω alors la variable aléatoire Y tronquée par un réel $\lambda > 0$ fixé est la variable aléatoire réelle : $Y^{[\lambda]}$ définie par : $Y^{[\lambda]} = Y \mathbb{1}_{\{|Y|\leq\lambda\}}$.

On va utiliser le théorème des trois séries de Kolmogorov, on va démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

i) $\sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\left(\left| \varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j \right| > \lambda \right)$ converge,

ii) $\sum_{j\geq 1} \mathbb{E}\left[\left(\varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j \right)^{[\lambda]} \right]$ converge,

iii) $\sum_{j\geq 1} \mathrm{Var}\left[\left(\varepsilon_\mathrm{j} \Gamma_\mathrm{j}^{-\frac{1}{\alpha}} \mathrm{W}_\mathrm{j} \right)^{[\lambda]} \right]$ converge.

Tout d'abord, $\left(\dfrac{\Gamma_n}{n} \right)_{n\geq 1}$ converge sur $\widetilde{\Omega}$, alors cette suite est bornée $\mathbb{P}$-presque sûrement, il existe deux variables aléatoires positives C_1, C_2 telles que :

$$\forall \omega \in \widetilde{\Omega}, \forall n \geq 1 : C_1(\omega) \leq \frac{\Gamma_n(\omega)}{n} \leq C_2(\omega).$$

Commentaire 3.38 *Dans le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2], on peut lire pour ce passage C_1, C_2 constantes, or, C_1, C_2 sont évidemment aléatoires (non déterministes), le passage suivant utilisant le lemme de Borel-Cantelli que j'expose, rend complète et rigoureuse la démonstration (le lemme de Borel-Cantelli n'était pas mentionné, le calcul paraissait direct).*

Alors $\mathbb{P}-$ presque sûrement, $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$. Et nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j\right| > \lambda\right) &= \mathbb{P}\left(\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} |W_j| > \lambda\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha \Gamma_j\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha j C_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left[\{|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha j C_1\} \cap \{C_1 > 0\}\right].
\end{aligned}$$

Considérons $\eta \in \mathbb{Q}_*^+$ et l'évènement $\{C_1 > \eta\}$, alors :

$$\mathbb{P}\left[\{|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha C_1 j\} \cap \{C_1 > \eta\}\right] = \mathbb{P}\left[|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha \eta j\right].$$

Or, comme $\mathbb{E}(|W_j|^\alpha) < +\infty$, alors pour tout λ strictement positif, la série $\sum_{j \geq 1} \mathbb{P}\left[|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha \eta j\right]$ converge.

En effet, en comparant la série à une intégrale et à l'aide du théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left[|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha \eta j\right] &= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{\lambda(\eta j)^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(y) \leq \int_0^{+\infty} \int_{\lambda(\eta j)^{\frac{1}{\alpha}}}^{+\infty} \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(y) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{y^\alpha \lambda^{-\alpha} \eta^{-1}} \mathrm{d}x \; \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(y) = \int_0^{+\infty} y^\alpha \lambda^{-\alpha} \eta^{-1} \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(y) \\
&= \frac{\mathbb{E}\left(|W_1|^\alpha\right)}{\lambda^\alpha \eta} < +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, la série : $\sum_{j \geq 1} \mathbb{P}\left[\{|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha C_1 j\} \cap \{C_1 > \eta\}\right]$ converge.

Ce qui, par le lemme de Borel-Cantelli équivaut à :

$$\mathbb{P}\left[\left(\limsup_{j \to +\infty} \{|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha C_1 j\}\right) \cap \{C_1 > \eta\}\right] = 0.$$

Faisant tendre η vers 0, par convergence monotone (décroissante), nous obtenons :

$$\mathbb{P}\left[\left(\limsup_{j \to +\infty} \{|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha C_1 j\}\right) \cap \{C_1 > 0\}\right] = 0 = \mathbb{P}\left[\limsup_{j \to +\infty} \{|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha C_1 j\}\right],$$

car $\mathbb{P}(C_1 > 0) = 1$.

Alors, encore par le lemme de Borel-Cantelli, la série : $\sum_{j \geq 1} \mathbb{P}\left[|W_j|^\alpha > \lambda^\alpha C_1 j\right]$ converge,

d'où (i). Pour la série de (ii), elle vaut zéro, car chaque espérance est nulle.

Enfin pour la série (iii), grâce aux théorèmes de transfert et de Tonelli :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left[\left(\varepsilon_j\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}W_j\mathbb{1}_{\{\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}|W_j|\leq\lambda\}}\right)^2\right] &= \sum_{j=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left(\Gamma_j^{-\frac{2}{\alpha}}W_j^2\mathbb{1}_{\{\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}|W_j|\leq\lambda\}}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{\lambda^{-\alpha}|w|^\alpha}^{+\infty} e^{-x}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}x^{-\frac{2}{\alpha}}w^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w).\\
&= \int_0^{+\infty}\int_{\lambda^{-\alpha}|w|^\alpha}^{+\infty} e^{-x}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right)x^{-\frac{2}{\alpha}}w^2\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w).\\
&= \int_0^{+\infty}\int_{\lambda^{-\alpha}|w|^\alpha}^{+\infty} x^{-\frac{2}{\alpha}}w^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w).\\
&= \int_0^{+\infty}\left[\frac{x^{1-\frac{2}{\alpha}}}{1-\frac{2}{\alpha}}\right]_{\lambda^{-\alpha}|w|^\alpha}^{+\infty} w^2\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w)\\
&= \frac{\lambda^{2-\alpha}\alpha}{2-\alpha}\int_0^{+\infty}|w|^\alpha\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{|W_1|}(w)\\
&\leq \frac{\lambda^{2-\alpha}\alpha}{2-\alpha}\ \mathbb{E}(|W_1|^\alpha)<+\infty.
\end{aligned}
$$

□

Corollaire 3.39 *Sous ces hypothèses et notations du théorème , si l'on suppose de plus les W_j symétriques, alors $\sum_{j\geq 1}\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}W_j$ converge $\mathbb{P}$-ps vers une variable aléatoire X dont la loi est $S_\alpha(\sigma,0,0)$.*

Preuve du corollaire 3.39 : En effet, si les W_j sont symétriques, alors les variables aléatoires ε_jW_j et W_j ont la même loi. En effet, observons les fonctions caractéristiques, sachant que : $\varepsilon_j \perp\!\!\!\perp W_j$, alors pour tout réel t, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\varepsilon_jW_jt}\right] &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{iwt}\mathrm{d}\mathbb{P}_{W_j}(w)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-iwt}\mathrm{d}\mathbb{P}_{W_j}(w)\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}}e^{iwt}\mathrm{d}\mathbb{P}_{W_j}(w)+\int_{\mathbb{R}}e^{iwt}\mathrm{d}\mathbb{P}_{-W_j}(w)\right]\\
&= \frac{1}{2}\times 2\int_{\mathbb{R}}e^{iwt}\mathrm{d}\mathbb{P}_{W_j}(w)=\int_{\mathbb{R}}e^{iwt}\mathrm{d}\mathbb{P}_{W_j}(w)=\mathbb{E}\left(e^{iW_jt}\right).
\end{aligned}
$$

Dès lors, parcourant la démonstration du Théorème 3.36, tous les calculs des étapes 1 et 2 restent valides en remplaçant les ε_jW_j par les variables symétriques W_j, car ces calculs ne font intervenir que les lois de ε_jW_j ou bien de $|W_j|$, et par le fait que $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$ est indépendante de

$(W_j)_{j\geq 1}$. Et, de même, l'étape 3 assurant la convergence $\mathbb{P}$-presque sûre ne fait qu'intervenir la loi des $|W_j|$. $\square$

Corollaire 3.40 *Soit $0 < \alpha < 2$, alors toute variable aléatoire X du type $S(\sigma, 0, 0)$ ($S\alpha S$ de paramètre $\sigma > 0$) possède comme série de Le Page :*

$$X = \sigma \left(\frac{c_\alpha}{\mathbb{E}\left(|W_1|^\alpha\right)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \times \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j, \ \mathbb{P}\text{-}ps,$$

où $(W_j)_{j\geq 1}$ est une suite de variables i.i.d telles que $\mathbb{E}\left(|W_1|^\alpha\right) < +\infty$, ou bien :

$$X = \sigma \left(\frac{c_\alpha}{\mathbb{E}\left(|W_1|^\alpha\right)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \times \sum_{j=1}^{+\infty} \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} W_j, \ \mathbb{P}\text{-}ps,$$

si l'on suppose en plus les W_j symétriques.

4 Processus symétriques α-stables

4.1 Vecteur aléatoire stable, variable SαS complexe

Définition 4.1 *Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ est dit stable si pour tous réels strictement positifs a, b et toutes copies $X^{(1)}, X^{(2)}$ indépendantes de X, il existe deux réels c et d tels que :*

$$aX^{(1)} + bX^{(2)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} cX + d. \tag{4.1}$$

On dit que X est strictement stable si pour tous réels a, b strictement positifs, et toutes copies $X^{(1)}, X^{(2)}$ indépendantes de X, il existe un réel c tel que : $aX^{(1)} + bX^{(2)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} cX$.
Enfin, on dit que le vecteur aléatoire X est symétrique stable, s'il est stable et si de plus il est symétrique, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d) : \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(-X \in A).$$

Remarque 4.2 Les définitions ci-dessus donnent des conditions sur la loi jointe. Qu'est ce que cela implique pour les composantes $X_1, \cdots, X_d$? Chaque composante est-elle stable ? Qu'en est-il des combinaisons linéaires ? Le théorème suivant répond à ces questions.

Théorème 4.3 *Soit $X = (X_1, \cdots, X_d)$ un vecteur aléatoire stable (respectivement strictement stable, respectivement symétrique stable) dans $\mathbb{R}^d$.*

— *Alors il existe une unique constante* α *appartenant à* $]0,2]$ *telle que la relation (4.1) de la Définition 4.1 a lieu pour* $c = (a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

— *De plus, toute combinaison linéaire des composantes de* X *est une variable aléatoire* α*-stable (respectivement strictement stable, respectivement symétrique stable).*

Comme la dimension 1, nous avons :

Corollaire 4.4 *Un vecteur aléatoire* X *est stable dans* $\mathbb{R}^d$ *si et seulement s'il existe un unique* α *appartenant à* $]0,2]$ *telle que pour tout entier* $n \geq 2$*, il existe un vecteur* $d_n \in \mathbb{R}^d$ *tel que pour toutes copies indépendantes* $X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}$:

$$\sum_{j=1}^{n} X^{(j)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X + d_n. \tag{4.2}$$

Les derniers théorème et corollaire motivent alors la définition suivante :

Définition 4.5 *Un vecteur aléatoire* $X = (X_1, \cdots, X_d)$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est dite* <u>*α-stable*</u> *pour un certain* α *appartenant à* $]0,2]$ *si la relation (4.1) de la Définition 4.1 a lieu pour le réel* $c = (a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ *ou si (de manière équivalente) la relation (4.2) du Corollaire 4.4 a lieu.*
Le réel α *est encore appelé (comme pour les lois stables)* <u>*indice de stabilité du vecteur* X.</u>

Remarque 4.6 La seconde partie du Théorème 4.3 nous dit que si X est un vecteur aléatoire stable alors toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont stables. La réciproque est-elle vraie ? Malheureusement, si $\alpha < 2$, la réponse est négative en général. Néanmoins la réponse est oui si toutes les combinaisons linéaires des composantes de X sont strictement stables (respectivement symétriques stables), ou encore si $\alpha \geq 1$. (Un contre-exemple existe et a été trouvé par David J. Marcus dans le cas où $0 < \alpha < 1$, et est exposé dans le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2].)

Théorème 4.7 *Soit* X *un vecteur aléatoire dans* $\mathbb{R}^d$.

i) Si toutes les combinaisons linéaires sont strictement stables, alors X *est strictement stable.*

ii) Si toutes les combinaisons linéaires des composantes de X *sont symétriques stables, alors* X *est symétrique stable.*

iii) Si toutes les combinaisons linéaires des composantes de X *sont* α*-stables pour un certain* $\alpha \geq 1$*, alors* X *est* α*-stable.*

Notation 4.8 *Notons $<\cdot\,,\cdot>$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$. $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. Et $\mathbb{S}_d$ désigne la sphère unité euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.*
Et notons, pour tout vecteur aléatoire α-stable $X=(X_1,\ \cdots,X_d)$ sa fonction caractéristique : ϕ_α, telle que pour tout $\Theta=(\theta_1,\ \cdots,\theta_d)$ dans $\mathbb{R}^d$:

$$\phi_\alpha(\Theta)=\mathbb{E}\left[\exp\left(i\left<\theta,X\right>\right)\right]=\mathbb{E}\left\{\exp\left[i\left(\sum_{j=1}^{d}\theta_j X_j\right)\right]\right\}.$$

Théorème 4.9 *Soit α un réel appartenant à $]0,2]$, alors le vecteur aléatoire $X=(X_1,\ \cdots,X_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ est α-stable si et seulement s'il existe une mesure finie Γ sur $(\mathbb{S}_d,\mathrm{Bor}(\mathbb{S}_d))$ et un vecteur $\mu_0\in\mathbb{R}^d$ tels que, pour tout $\Theta=(\theta_1,\ \cdots,\theta_d)\in\mathbb{R}^d$:*

i) Si $\alpha\neq 1$:

$$\phi_\alpha(\Theta)=\exp\left\{-\int_{\mathbb{S}_d}|\left<\Theta,s\right>|^\alpha\times\left[1-i\ \mathrm{sgn}\left(\left<\Theta,s\right>\right)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\mathrm{d}\Gamma(s)+i\left<\Theta,\mu_0\right>\right\}.$$

ii) Si $\alpha=1$:

$$\phi_\alpha(\Theta)=\exp\left\{-\int_{\mathbb{S}_d}|\left<\Theta,s\right>|\times\left[1+\frac{2}{\pi}i\ \mathrm{sgn}\left(\left<\Theta,s\right>\right)\log\left(|\left<\Theta,s\right>|\right)\right]\mathrm{d}\Gamma(s)+i\left<\Theta,\mu_0\right>\right\}.$$

De plus, le couple (Γ,μ_0) est unique lorsque $0<\alpha<2$.

Définition 4.10 *Soit $X=(X_1,\ \cdots,X_d)$ un vecteur aléatoire α-stable dans $\mathbb{R}^d$, pour un certain $0<\alpha<2$, alors :*

- *Le couple (Γ,μ_0) associé à X dans le théorème 4.3 est appelé représentation spectrale du vecteur stable X.*
- *La mesure Γ est appelée la mesure spectrale du vecteur stable X.*

Remarque 4.11 Rappelons qu'une mesure m sur $(\mathbb{S}_d,\mathrm{Bor}(\mathbb{S}_d))$ est symétrique si pour tout A appartenant à $\mathrm{Bor}(\mathbb{S}_d)$, $m(A)=m(-A)$.
Dés lors, dans les cas stricte et symétrique, nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 4.12 *Soit α un réel appartenant à $]0,2]$, alors le vecteur aléatoire $X=(X_1,\ \cdots,X_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ est strictement α-stable si et seulement si la représentation spectrale (Γ,μ_0) de X vérifie :*

i) Dans le cas où $\alpha\neq 1$: $\mu_0=0_{\mathbb{R}^d}$.

ii) Dans le cas où $\alpha=1$: $\forall k\in\{1,\ \cdots,d\}$: $\displaystyle\int_{\mathbb{S}_d}s_k\mathrm{d}\Gamma(s)=0$.

Théorème 4.13 *Soit α un réel appartenant à $]0,2[$.*
Alors le vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ est symétrique α-stable (que l'on note encore $S\alpha S$) si et seulement s'il existe une unique mesure Γ finie sur $(\mathbb{S}_d, \mathrm{Bor}(\mathbb{S}_d))$ telle que, pour tout Θ dans $\mathbb{R}^d$:

$$\phi_\alpha(\Theta) = \mathbb{E}\left[\exp\left(i \ \langle \Theta, X\rangle\right)\right] = \exp\left[-\int_{\mathbb{S}_d} |\langle \Theta, s\rangle|^\alpha \,\mathrm{d}\Gamma(s)\right]. \tag{4.3}$$

Remarque 4.14

— Les démonstrations des théorèmes 4.3, 4.7, 4.9, 4.12 et 4.13, et du corollaire 4.4 se trouvent dans le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2].

— Passons à présent aux variables complexes stables, et présentant leurs propriétés. Nous allons plus tard présenter dans ce mémoire une classe importante de processus réels stables (processus harmonisables) qui peuvent être définis en termes de variables complexes $S\alpha S$.
Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles définis sur le même espace probabilisé. C'est la loi du vecteur (X_1, X_2) qui va caractériser la variable aléatoire complexe $X = X_1 + iX_2$.

Définition 4.15 *Soit α un réel appartenant à $]0,2[$.*

i) Une variable aléatoire complexe $X = X_1 + iX_2$ est dite <u>symétrique</u> <u>α-stable</u> (encore notée $S\alpha S$) si le vecteur aléatoire bi-dimensionnel (X_1, X_2) est $S\alpha S$.

ii) Une variable aléatoire complexe $S\alpha S$ $X = X_1 + iX_2$ est dite <u>invariante par rotation</u> (ou <u>isotrope</u>) si :

$$\forall\ \beta \in [0, 2\pi[: e^{i\beta} X \overset{\mathcal{L}}{=} X. \tag{4.4}$$

Théorème 4.16 *Soit α un réel appartenant à $]0,2[$. Alors une variable complexe $S\alpha S$ X est isotrope si et seulement s'il existe $\sigma > 0$ telle que sa fonction caractéristique ϕ_X est de la forme, pour tout z complexe :*

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}\left[i\ \mathfrak{Re}(\overline{z}X)\right] = e^{-\sigma^\alpha |z|^\alpha}.$$

Voici le théorème relatif à la représentation en série de Le Page pour une variable complexe $S\alpha S$ isotrope.

Théorème 4.17 *Soit V une variable aléatoire complexe invariante par rotation.*
Supposons que $\mathbb{E}\left[|\mathfrak{Re}(V)|^\alpha\right] < +\infty$. Et soit $(V_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et suivant toutes la loi de V.

Supposons également que la suite des instants d'arrivée $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$ d'un processus de Poisson d'intensité égale à 1, et la suite $(V_j)_{j\geq 1}$ sont indépendantes.
Alors la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires complexes définie pour n entier naturel non nul par :

$$Y_n = c_\alpha \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} V_j \tag{4.5}$$

converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers une variable aléatoire complexe Y qui est $S\alpha S(\sigma)$ où : $\sigma = c_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}\left[|\mathfrak{Re}(V)|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}$.

Preuve du théorème 4.17 : Tout d'abord, par invariance par rotation, $e^{i\pi}V = -V$ possède la même loi que V. Donc V est symétrique. Donc $\mathfrak{Re}(V)$ et $\mathfrak{Im}(V)$ le sont aussi :

$$-V \overset{\mathcal{L}}{=} V \Rightarrow -\mathfrak{Re}(V) - i\ \mathfrak{Im}(V) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathfrak{Re}(V) + i\ \mathfrak{Im}(V) \Rightarrow \begin{cases} -\mathfrak{Re}(V) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathfrak{Re}(V) \\ -\mathfrak{Im}(V) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathfrak{Im}(V) \end{cases}.$$

Ensuite encore par invariance par rotation, $e^{i\frac{\pi}{2}}V$ possède la même loi que V de sorte que :

$$\mathbb{E}\left[|\mathfrak{Im}(V)|^\alpha\right] = \mathbb{E}\left[\left|\mathfrak{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}V\right)\right|^\alpha\right] = \mathbb{E}\left[|\mathfrak{Re}(V)|^\alpha\right].$$

Donc, comme $\mathbb{E}\left[|\mathfrak{Re}(V)|^\alpha\right] < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[|\mathfrak{Im}(V)|^\alpha\right] < +\infty$ d'après le Corollaire 3.39 (le cas réel), les deux suites de variables aléatoires réelles :

$$\mathfrak{Re}(Y_n) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} \mathfrak{Re}(V_j), \text{ et : } \mathfrak{Im}(Y_n) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} \mathfrak{Im}(V_j),$$

convergent $\mathbb{P}-$presque sûrement vers respectivement deux variables aléatoires réelles $S\alpha S$, que nous nommons : $Y^{(1)}$, et $Y^{(2)}$.
Il existe alors deux évènements Ω_1, Ω_2, tels que $\mathbb{P}(\Omega_1) = \mathbb{P}(\Omega_2) = 1$, et tels que :

$$\begin{cases} \forall\ \omega_1 \in \Omega_1 : [\mathfrak{Re}(Y_n)](\omega_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y^{(1)}(\omega_1) \\ \forall\ \omega_2 \in \Omega_2 : [\mathfrak{Im}(Y_n)](\omega_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y^{(2)}(\omega_2) \end{cases}.$$

Soit Y la variable aléatoire complexe égale à $Y^{(1)} + iY^{(2)}$. Alors $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$, est un évènement $\mathbb{P}$-presque sûr, et alors pour tout ω dans Ω_3 :

$$Y_n(\omega) = \mathfrak{Re}(Y_n)(\omega) + i\ \mathfrak{Im}(Y_n)(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y^{(1)}(\omega) + i\ Y^{(2)}(\omega) = Y(\omega),$$

ce qui prouve que la suite Y_n converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers Y.
Il nous reste à montrer que Y est complexe symétrique α-stable.

Comme V est invariante par rotation, pour tout complexe non nul z, θ_z désignant un argument de $\overline{z}$:

$$\mathfrak{Re}(\overline{z}V) = \mathfrak{Re}\left(|z|e^{i\theta_z}V\right) = |z|\ \mathfrak{Re}\left(e^{i\theta_z V}\right) \overset{\mathcal{L}}{=} |z|\ \mathfrak{Re}(V), \tag{4.6}$$

l'égalité en loi entre les premier et dernier membres étant encore vraie si $z = 0$.
Alors, appliquant le Corollaire 3.39 (le cas réel), à la série $\sum_{j\geq 1} \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} \mathfrak{Re}(\overline{z}V_j)$, et utilisant la dernière égalité (4.6) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(i\ \mathfrak{Re}(\overline{z}Y)\right)\right] &= \mathbb{E}\left\{\exp\left[\sum_{j=1}^{+\infty} \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} \mathfrak{Re}(\overline{z}V_j)\right]\right\} \\
&= \exp\left\{-c_\alpha^{-1}\mathbb{E}\left[|\mathfrak{Re}(\overline{z}V)|^\alpha\right]\right\} \\
&= \exp\left\{-c_\alpha^{-1}|z|^\alpha\mathbb{E}\left[|\mathfrak{Re}(V)|^\alpha\right]\right\} = \exp\left[-\sigma^\alpha|z|^\alpha\right],
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

4.2 Processus stables

Dans cette section, T désigne un ensemble non vide arbitraire. Il peut être un espace de fonctions ou de boréliens (ce qui sera en effet le cas).

Définition 4.18 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est dit stable si toutes ses lois fini-dimensionnelles sont stables.*
Il est strictement stable si toutes ses lois fini-dimensionnelles sont strictement stables.
Enfin, il est symétrique stable si toutes les lois fini-dimensionnelles sont symétriques stables.

Remarque 4.19 Les Théorèmes 4.3 et 4.7 impliquent que toutes les lois fini-dimensionnelles d'un processus stable doivent le même indice de stabilité α, Ainsi, on peut définir l'indice de stabilité d'un processus stable, et démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.20 *Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique. Alors :*

a) $(X_t)_{t\in T}$ est strictement stable si et seulement si toutes les combinaisons linéaires

$$\sum_{k=1}^{d} b_k X_{t_k},\ \textit{pour tous } t_1, \cdots, t_d \textit{ dans } T, \textit{ et tous } b_1, \cdots, b_d \textit{ réels}, \tag{4.7}$$

sont strictement stables.

b) $(X_t)_{t\in T}$ est symétrique stable si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de la forme (4.7) sont symétriques stables.

c) Si $\alpha \geq 1$, $(X_t)_{t\in T}$ est α-stable si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de la forme (4.7) sont α-stables.

Example 4.21 Un exemple de processus stable : Fixons $0 < \alpha \leq 2$, et $-1 \leq \beta \leq 1$. Le Théorème 1.4 de consistance de Kolmogorov justifie l'existence du processus $(Z_\alpha(t))_{t\geq 0}$ appelé processus de Lévy α-stable (standard) et qui vérifie :

i) $Z_\alpha(0) = 0$, $\mathbb{P}$-presque sûrement.

ii) $(Z_\alpha(t))_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants.

iii) Pour tous $s, t \geq 0$, tels que $s < t$: $Z_\alpha(t) - Z_\alpha(s)$ suit la loi $S_\alpha((t-s)^\alpha, \beta, 0)$.

Ce processus est alors à accroissements stationnaires. Lorsque $\alpha = 2$, nous retrouvons le mouvement brownien. Les processus de Lévy α-stables sont symétriques lorsque $\beta = 0$. Et il sont $\dfrac{1}{\alpha}-$similaires (sauf quand $\alpha = 1, \beta \neq 0.$).

4.3 Intégrale symétrique stable

Dans cette section, nous suivons toujours le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2], en adaptant les résultats et démonstrations au cas symétrique uniquement.

Soit $0 < \alpha \leq 2$, et soit $(E, \mathcal{E}, m)$ un espace mesuré, et considérons l'espace fonctionnel $L^\alpha(E, \mathcal{E}, m)$, que l'on notera $L^\alpha(E)$.

"L'intégrale stable" d'une fonction déterministe f sera notée $I(f)$. Nous allons définir une famille $(I(f))_{f\in L^\alpha(E)}$ comme un processus stochastique indexé sur l'espace de fonctions $L^\alpha(E)$.

L'intégrale, que nous allons construire, aura une propriété de linéarité $\mathbb{P}$-presque sûre.

Nous allons expliciter les lois fini-dimensionnelles et montrer que la famille de ces lois fini-dimensionnelles est consistante, le Théorème 1.4 de consistance de Kolmogorov (attention l'espace des états est $\mathbb{R}$, non pas E) assurera alors que le processus $(I(f))_{f\in L^\alpha(E)}$ est bien défini.

Théorème 4.22 *Etant données $f_1, \cdots, f_d$ appartenant à $L^\alpha(E)$, nous définissons la loi de probabilité $\mathbb{P}_{(f_1,\cdots,f_d)}$ sur $\mathbb{R}^d$, par sa fonction caractéristique, en posant $F = (f_1, \cdots, f_d)$,*

$$\forall\ \Theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d) \in \mathbb{R}^d : \phi_F(\Theta) = \exp\left[-\int_E \left|\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right|^\alpha \mathrm{d}m(x)\right]. \tag{4.8}$$

Alors, il existe un processus $(I(f))_{f\in L^\alpha(E)}$ dont les lois fini-dimensionnelles sont les lois de probabilité $\mathbb{P}_{(f_1,\cdots,f_d)}$ de fonction caractéristique $\phi_{(f_1,\cdots,f_d)}$.

De plus, pour tout f appartenant à $L^\alpha(E)$:

$$I(f) \text{ suit la loi } S\alpha S(\sigma), \text{ où : } \sigma = \left(\int_E |f|^\alpha \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Preuve du théorème 4.22 : Montrons en effet que $\phi_{(f_1,\ \cdots,f_d)}$ est la fonction caractéristique d'une loi stable sur $\mathbb{R}^d$. Il va falloir pour cela effectuer un changement de variable transformant cette intégrale sur E en une autre sur $\mathbb{S}_d$.

Notons que m n'est pas nécessairement la mesure spectrale d'une loi α-stable, car E n'est pas a priori égal à $\mathbb{S}_d$. Cependant, l'avantage de la relation (4.8) est que la mesure m est utilisée quels que soient d et les fonctions $f_1,\ \cdots, f_d$ dans $L^\alpha(E)$.

Posons $F = (f_1, \cdots, f_d)$, et pour tout $\Theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d)$ appartenant à $\mathbb{R}^d$:

$$u(\Theta, F(x)) = \left|\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)\right|^\alpha, \text{ et : } E_+ = \left\{x \in E \mid \sum_{j=1}^{d} f_j^2(x) > 0\right\}. \tag{4.9}$$

Alors, E_+ appartient à $\mathcal{E}$, Et alors si x appartient à $E \backslash E_+$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{d} \theta_j^2\right|^{\frac{1}{2}} \left|\sum_{j=1}^{d} f_j^2(x)\right|^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\phi_F(\Theta) =&\ \exp\left[-\int_E u(\Theta, F(x))\mathrm{d}m(x)\right] = \exp\left[-\int_{E^+} u(\Theta, F(x))\mathrm{d}m(x)\right] \\
=&\ \exp\left\{-\int_{E^+} u\left[\Theta, \left(\sum_{j=1}^{d} f_j(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \times F(x)\right] \times \left(\sum_{j=1}^{d} f_j(x)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{d}m(x)\right\} \\
=&\ \exp\left[-\int_{E_+} u(\Theta, G(x))\right] \mathrm{d}m_1(x),
\end{aligned}$$

où $G = (g_1,\ \cdots, g_d)$, telle que pour tout $1 \leq j \leq d$, et pour tout x appartenant à E_+ : $g_j(x) = \dfrac{f_j(x)}{\left(\sum_{k=1}^{d} f_k^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}}$, et pour tout x appartenant à $E \setminus E_+$: $g_j(x) = 0$, et où m_1 est la mesure sur $(E, \mathcal{E})$ définie par : $m_1 = \left(\sum_{j=1}^{d} f_k^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot m$

m_1 est une mesure finie car chaque f_k appartient à $L^\alpha(E)$.

De plus, pour tout x appartenant à E_+ : $\sum_{j=1}^{d} g_j^2(x) = 1$.

Nous effectuons alors le changement de variable :

$$s = (s_1,\ \cdots, s_d) = (g_1(x),\ \cdots, g_d(x)) = G(x).$$

Alors : $x \in E_+ \Longleftrightarrow (s_1, \cdots, s_d) \in \mathbb{S}_d$. Et nous avons, pour tout Θ appartenant à $\mathbb{R}^d$:

$$\phi_F(\Theta) = \exp\left(- \int_{\mathbb{S}_d} \left| \sum_{j=1}^{d} \theta_j s_j \right|^\alpha \mathrm{d}\Gamma(s) \right),$$

où Γ est la mesure finie sur $(\mathbb{S}_d, \mathrm{Bor}(\mathbb{S}_d))$ telle que, pour tout A dans $\mathrm{Bor}(\mathbb{S}_d)$:

$$\Gamma(A) = \int_{E_+} \mathbb{1}_{G^{-1}(A)}(x) \mathrm{d}m_1(x), \text{ où : } G^{-1}(A) = \{x \in E_+ \mid G(x) \in A\}. \tag{4.10}$$

Le Théorème 4.9 nous dit alors que cette fonction ϕ_F est bien la fonction caractéristique d'une loi symétrique α-stable sur $\mathbb{R}^d$.

Enfin, pour la consistance de la famille des lois $\mathbb{P}_{(f_1, \cdots, f_d)}$:

— Pour toute permutation σ dans $\mathcal{S}_d$: pour tout $\Theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d)$ dans $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \phi_{(f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(d)})}(\theta_{\sigma(1)}, \cdots, \theta_{\sigma(d)}) &= \exp\left[- \int_{\mathbb{S}_d} \left| \sum_{j=1}^{d} \theta_{\sigma(j)} s_{\sigma(j)} \right|^\alpha \mathrm{d}\Gamma(s) \right] \\ &= \exp\left[- \int_{\mathbb{S}_d} \left| \sum_{j=1}^{d} \theta_j s_j \right|^\alpha \mathrm{d}\Gamma(s) \right] = \phi_{(f_1, \cdots, f_d)}(\theta_1, \cdots, \theta_d). \end{aligned}$$

— Si $1 \leq d' < d$, pour tout $f_1, \cdots, f_d$ dans $L^\alpha(E)$, pour tout $(\theta_1, \cdots, \theta_{d'})$ dans $\mathbb{R}^{d'}$, en posant $\theta_{d'+1} = 0, \cdots, \theta_d = 0$:

$$\begin{aligned} \phi_{(f_1, \cdots, f_{d'})}(\theta_1, \cdots, \theta_{d'}) &= \exp\left[- \int_E \left| \sum_{j=1}^{d'} \theta_j f_j(x) \right|^\alpha \mathrm{d}m(x) \right] \\ &= \exp\left[- \int_E \left| \sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x) \right|^\alpha \mathrm{d}m(x) \right] \\ &= \phi_{(f_1, \cdots, f_d)}(\theta_1, \cdots, \theta_{d'}, 0, \cdots 0). \end{aligned}$$

Enfin, si f appartient à $L^\alpha(E)$, alors $I(f)$ a pour fonction caractéristique, pour tout θ réel :

$$\phi_f(\theta) = \exp\left[- \int_E |\theta|^\alpha |f|^\alpha \mathrm{d}m \right] = \exp\left[-|\theta|^\alpha \int_E |f|^\alpha \mathrm{d}m \right],$$

qui est bien la fonction caractéristique de la loi d'une variable aléatoire réelle $S\alpha S$ de paramètre $\sigma = \left(\int_E |f|^\alpha \mathrm{d}m \right)^{\frac{1}{\alpha}}$. $\square$

Définition 4.23 *Pour tout f appartenant à $L^\alpha(E, \mathcal{E}, m)$, on appelle intégrale α-stable la variable aléatoire $I(f)$.*

Propriétés 4.24 *Le processus $(I(f))_{f \in L^\alpha(E)}$ admet une propriété de linéarité $\mathbb{P}$-presque sûre, c'est-à-dire :*

$$\forall\ f_1, f_2 \in L^\alpha(E), \forall\ a_1, a_2 \in \mathbb{R} : I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2), \mathbb{P}\text{-}ps.$$

Preuve de la propriété 4.24 : Pour tout θ réel :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left\{i\theta\left[I\left(a_1 f_1 + a_2 f_2\right) - a_1 I(f_1) - a_2 I(f_2)\right]\right\} \\
= & \ \mathbb{E}\left\{i\left[\theta I\left(a_1 f_1 + a_2 f_2\right) - (a_1\theta) I(f_1) - (a_2\theta) I(f_2)\right]\right\} \\
= & \ \phi_{(a_1 f_1 + a_2 f_2, f_1, f_2)}(\theta, -a_1\theta, -a_2\theta) \\
= & \ \exp\left[-\int_E \left|\theta a_1 f_1(x) + \theta a_2 f_2(x) - \theta a_1 f_1(x) - \theta a_2 f_2(x)\right|^\alpha \mathrm{d}m(x)\right] = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la variable $I(a_1 f_1 + a_2 f_2) - a_1 I(f_1) - a_2 I(f_2)$ est nulle, et alors $\mathbb{P}$-presque sûrement :

$$I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2).$$

$\square$

4.4 Mesure aléatoire symétrique stable

Encore une fois dans cette section, nous suivons toujours le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2], en adaptant les résultats et démonstrations au cas symétrique uniquement.
Considérons toujours un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m)$. Notons : $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} \mid m(A) < +\infty\}$.
Et notons $L^0(\Omega)$ l'espace des variables aléatoire réelles sur Ω.

Définition 4.25 *Soit $M : \mathcal{E}_0 \longrightarrow L^0(\Omega)$.*

— *On dit que M est indépendamment dispersée si pour tout entier naturel k non nul, et pour tous $A_1, \cdots, A_k$ appartenant à $\mathcal{E}_0$ et deux à deux disjoints, les variables aléatoires $M(A_1), \cdots M(A_k)$ sont indépendantes.*

— *On dit M est σ-additive si pour toute suite $(A_j)_{j \geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{E}_0$ tels que $\dot{\bigcup}_{j=1}^{+\infty} A_j$ appartient encore à $\mathcal{E}_0$, on a :*

$$M\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{+\infty}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} M(A_j),\ \mathbb{P}\text{-}ps.$$

— *Soit $0 < \alpha \leq 2$. M est une* <u>*mesure aléatoire symétrique α-stable*</u> *(encore notée $S\alpha S$) si M est indépendamment dispersée, σ-additive et telle que :*

$$\forall\ A \in \mathcal{E}_0 : M(A) \text{ suit la loi } S_\alpha S(\sigma), \text{ où : } \sigma = (m(A))^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.11}$$

Proposition 4.26 *Considérons le processus $S\alpha S$ $(I(f))_{f\in L^\alpha(E)}$ du Théorème 4.22, alors :*

$$M : \begin{cases} \mathcal{E}_0 \longrightarrow L^0(\Omega) \\ A \longmapsto I(\mathbb{1}_A) \end{cases} \text{ est une mesure aléatoire } S\alpha S.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.26 :

— Pour tout A dans $\mathcal{E}_0$, la norme $L^\alpha(E)$ de la fonction $\mathbb{1}_A$ est bien sûr $(m(A))^{\frac{1}{\alpha}}$. Et le Théorème 4.22 assure que $M(A) = I(\mathbb{1}_A)$ suit la loi $S\alpha S(\sigma)$, où $\sigma = (m(A))^{\frac{1}{\alpha}}$.

— Montrons l'indépendance dispersée. Soient k dans $\mathbb{N}^*$, et $A_1, \cdots, A_k$ dans $\mathcal{E}_0$, deux à deux disjoints.

Calculons la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $(I(\mathbb{1}_{A_1}), \cdots, I(\mathbb{1}_{A_k}))$ égal au vecteur $(M(A_1), \cdots, M(A_k))$. Pour tout $(\theta_1, \cdots, \theta_k)$ appartenant à $\mathbb{R}^k$, et pour tout x appartenant à E, les A_j étant deux à deux disjoints :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{k}\theta_j \mathbb{1}_{A_j}(x)\right|^\alpha &= \begin{cases} |\theta_1|^\alpha, \text{ si } x \in A_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ |\theta_k|^\alpha, \text{ si } x \in A_k \end{cases} \\
&= \sum_{j=1}^{k} |\theta_j|^\alpha\, \mathbb{1}_{A_j}(x).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[i\sum_{j=1}^{k}\theta_j M(A_j)\right] &= \exp\left[-\int_E \left|\sum_{j=1}^{k}\theta_j \mathbb{1}_{A_j}(x)\right|^\alpha \mathrm{d}m(x)\right] \\
&= \exp\left[-\int_E \sum_{j=1}^{k} |\theta_j|^\alpha\, \mathbb{1}_{A_j}(x)\mathrm{d}m(x)\right] \\
&= \prod_{j=1}^{k} \exp\left[-\int_E |\theta|^\alpha \mathbb{1}_{1_j}(x)\mathrm{d}m(x)\right] = \prod_{j=1}^{k} \exp\left[i\theta_j M(A_j)\right],
\end{aligned}$$

ce qui montre l'indépendance des variables aléatoires $M(A_1), \cdots, M(A_k)$.

— L'additivité pour des familles finies d'éléments de $\mathcal{E}_0$ deux-à-deux disjoints $A_1, \cdots, A_k$ est assurée par la linéarité ($\mathbb{P}$-presque sûre) de l'intégrale symétrique stable, le fait que : $\mathbb{1}_{\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{k} A_j\right)} = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{A_j}$.

Soit à présent une suite $(A_j)_{j\geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{E}_0$ tels que $A = \dot{\bigcup}_{j=1}^{+\infty} A_j$ appartient encore à $\mathcal{E}_0$.
Nous devons montrer que :

$$M(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} M(A_j) \ \left(= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} M(A_j) \right), \ \mathbb{P}\text{-ps.}$$

Les variables aléatoires $M(A_j)$ étant indépendantes, le Théorème 1.1 de Paul Lévy que la convergence $\mathbb{P}$-presque sûre de la série $\sum_{j\geq 1} M(A_j)$ est équivalente à sa convergence en probabilité. Nous allons prouver sa convergence en probabilité.
Grâce à l'additivité pour les familles finies d'éléments de $\mathcal{E}_0$ deux à deux disjoints, d'une part :

$$\sum_{j=1}^{n} M(A_j) = M\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j \right), \ \mathbb{P}\text{-ps.} \tag{4.12}$$

D'autre part : $\dot{\bigcup}_{j=n+1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{E}_0$, car : $\dot{\bigcup}_{j=n+1}^{+\infty} A_j \subset A$, donc :

$$M(A) = M\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j \right) + M\left(\dot{\bigcup_{j=n+1}^{+\infty}} A_j \right), \ \mathbb{P}\text{-ps.} \tag{4.13}$$

Par conséquent, combinant les égalités (4.12) et (4.13), nous avons $\mathbb{P}$-presque sûrement :

$$M(A) - \sum_{j=1}^{n} M(A_j) = M(A) - M\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j \right) = M\left(\dot{\bigcup_{j=n+1}^{+\infty}} A_j \right).$$

Or, m est σ-additive et alors :

$$M\left(\dot{\bigcup_{j=n+1}^{+\infty}} A_j \right) \text{ suit la loi } S\alpha S(\sigma_n), \text{ où : } \sigma_n^\alpha = m\left(\dot{\bigcup_{j=n+1}^{+\infty}} A_j \right) = \sum_{j=n+1}^{+\infty} m(A_j).$$

Comme $\sigma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors, d'après l'inégalité de Markov dans l'espace $L^\alpha(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\left| M\left(\dot{\bigcup_{j=n+1}^{+\infty}} A_j \right) \right| > \varepsilon \right] \leq \frac{\sigma_n^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc : $M\left(\dot{\bigcup_{j=n+1}^{+\infty}} A_j\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.
Et alors, l'égalité $\mathbb{P}$-presque sûre (4.4) nous donne :

$$M(A) - M\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0,$$

ce qui prouve la σ-additivité de M.

□

4.5 Définition constructive de l'intégrale symétrique stable

L'intégrale α-stable a été définie dans la section 4.3 comme un processus stochastique indexé sur la famille d'intégrandes f.
Dans cette section, nous allons montrer que $I(f)$ peut aussi être construite comme une authentique intégrale qui sera notée $\int_E f(x)\mathrm{d}M(x)$, où M est une mesure aléatoire symétrique stable. La méthode classique, nous allons approximer f par une suite de fonctions $(f_n)_{\geq 1}$ simples (ne prenant qu'un nombre fini de valeurs), et dont la définition de leur intégrale $\int_E f_n(x)\mathrm{d}M(x)$ est facile. Et nous prendrons la limite en probabilité (comme l'intégrale de Wiener). Nous montrons finalement que l'intégrale définie dans la section 4.3 et celle que nous aurons définie correspondent.
Considérons toujours un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m)$. Notons : $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} \mid m(A) < +\infty\}$.
Et notons $L^0(\Omega)$ l'espace des variables aléatoire réelles sur Ω.
Soient enfin un réel α appartenant à $]0, 2]$, l'espace de Lebesgue $L^\alpha(E, \mathcal{E}, m)$ et une mesure aléatoire symétrique M α-stable définie sur $\mathcal{E}_0$.
Soit la fonction usuelle f de la forme $f(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j \mathbb{1}_{A_j}$, où les A_j pour $1 \leq j \leq d$ appartiennent à $\mathcal{E}_0$ et sont deux à deux disjoints.
Nous définissons :

$$\mathcal{I}(f) = \int_E f(x)\mathrm{d}M(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j M(A_j). \tag{4.14}$$

Comme M est indépendamment dispersée et σ-additive, les variables aléatoires symétriques stables $M(A_j)$ sont indépendantes.
Utilisant la Propriété 3.13 (i) et (iii) à d variables stables indépendantes et dans le cas

symétrique, nous obtenons :

$$\mathcal{I}(f) \text{ suit la loi } S_\alpha(\sigma_f, 0, 0), \text{ où : } \sigma_f = \left(\sum_{j=1}^{d} c_j^\alpha m(A_j)\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\int_E |f|^\alpha \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'intégrale $\mathcal{I}(f)$ est clairement linéaire pour les fonctions simples.
Considérons maintenant f appartenant à $L^\alpha(E)$. Alors nous savons qu'il existe une suite de fonctions simples $(f_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m-pp} f \\ \exists g \in L^\alpha(E) \mid \forall n \geq 1, \forall x \in E : |f_n(x)| \leq g(x). \end{cases} \tag{4.15}$$

Une telle suite de fonctions simples existe :

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n^2-1} \left(\frac{j}{n} \mathbb{1}_{f^{-1}([\frac{j}{n};\frac{j+1}{n}[)}(x) + \left(-\frac{j}{n}\right) \mathbb{1}_{f^{-1}([-\frac{j+1}{n};-\frac{j}{n}[)}(x) \right)$$

(cette suite est majorée par $g = |f|$.)
La suite $(\mathcal{I}(f_n))_{n\geq 1}$ est alors bien définie, et nous allons montrer qu'elle converge en probabilité. Nous allons montrer qu'elle est de Cauchy en probabilité.
Soient n, k des entiers naturels non nuls. Alors, par linéarité de $\mathcal{I}$ pour les fonctions simples :

$$\mathcal{I}(f_n) - \mathcal{I}(f_k) = \mathcal{I}(f_n - f_k), \text{ qui suit la loi } S_\alpha(\sigma_{n,k}, 0, 0), \text{ où : } \sigma_{n,k} = \left(\int_E |f_n - f_k|^\alpha \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La suite $(\mathcal{I}(f_n))_{n\geq 1}$ est alors de Cauchy en probabilité et donc converge en probabilité, si l'on parvient à prouver que $\sigma_{n,k}$ tend vers 0 quand n et k tendent vers $+\infty$.
Nous avons, pour tout x appartenant à E : $|f_n(x) - f_k(x)| \leq 2g(x)$, et donc la convergence dominée donne : $\sigma_{n,k} \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0$.
Soit une autre suite $(g_n)_{n\geq 1}$ vérifiant la relation (4.15), convergente donc m-pp vers f. Nous allons prouver que la limite en probabilité de la suite $(\mathcal{I}(f_n))_{n\geq 1}$.
Soit $h_n = \begin{cases} f_k, \text{ si : } n = 2k \\ g_k, \text{ si : } n = 2k-1 \end{cases}$.
Alors $(\mathcal{I}(h_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $\mathcal{H}$, les suites $(\mathcal{I}(f_k))_{k\geq 1}$, et $(\mathcal{I}(g_k))_{k\geq 1}$ convergent en probabilité respectivement vers disons $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, alors ces deux dernières suites étant des sous-suites de la suite $(\mathcal{I}(h_n))_{n\geq 1}$, par unicité des limites en probabilité, nous avons : $\mathcal{F} = \mathcal{H} = \mathcal{G}$.
Nous définissons alors $\mathcal{I}(f)$ comme étant la limite en probabilité de la suite des variables α-stables symétriques $\mathcal{I}(f_n)_{n\geq 1}$ où $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonction simples vérifiant la relation

(4.15) (cette limite en probabilité, ainsi, ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ choisie vérifiant la relation (4.15)).
La convergence en loi implique la convergence en loi. De plus, pour tout θ réel :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\theta\mathcal{I}(f_n)\right)\right] = \exp\left[-|\theta|^\alpha \times \left(\int_E |f_n|^\alpha \mathrm{d}m\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left[-|\theta|^\alpha \times \left(\int_E |f|^\alpha \mathrm{d}m\right)\right],$$

qui est la fonction caractéristique de la loi $S_\alpha(\sigma_f, 0, 0)$, où $\sigma_f = \left(\int_E |f|^\alpha \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.
Ainsi : $\mathcal{I}(f)$ suit la loi $S_\alpha(\sigma_f, 0, 0)$, où $\sigma_f = \left(\int_E |f|^\alpha \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Donc $\mathcal{I}(f)$ et $I(f)$ définie dans la section 4.3 sont égales.
Nous retrouvons la linéarité de l'intégrale, en effet, soient f, g appartenant à $L^\alpha(E)$, et soient $(f_n)_{n\geq 1}, (g_n)_{n\geq 1}$ deux suites convergentes m-presque partout respectivement vers f et g et vérifiant la condition (4.15) (notons θ_1 et θ_2 les fonctions dominant respectivement $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$).
Soient a, b deux réels, et soit $h = af + bg, h_n = af_n + bg_n$. Alors, h_n converge simplement vers h, et pour tout x appartenant à E, et pour tout $n \geq 1$:

$$|h_n(x)| \leq |a||f_n(x)| + |b||g_n(x)| \leq |a|\theta_1(x) + |b|\theta_2(x).$$

Alors, les limites écrites ci-dessous sont en probabilité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(h) &= \lim_{n\to+\infty} \mathcal{I}(h_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} a\mathcal{I}(f_n) + b\mathcal{I}(g_n) \\
&= a \lim_{n\to+\infty} \mathcal{I}(f_n) + b \lim_{n\to+\infty} \mathcal{I}(g_n) \\
&= a\mathcal{I}(f) + b\mathcal{I}(g).
\end{aligned}$$

La linéarité de l'intégrale ainsi construite et le fait que pour tout f appartenant à $L^\alpha(E)$, $\mathcal{I}(f)$ suit la loi $S\alpha S(\sigma_f)$, où $\sigma_f = \left(\int_E |f|^\alpha \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, nous permet de retrouver :

Proposition 4.27 *Pour tous $f_1, \cdots, f_d$ appartenant à $L^\alpha(E)$,*

i) La fonction caractéristique du vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$: $(\mathcal{I}(f_1), \cdots, \mathcal{I}(f_d))$ est donnée par la relation (4.8)

ii) Le vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$: $(\mathcal{I}(f_1), \cdots, \mathcal{I}(f_d))$ est un vecteur $S\alpha S$ ayant pour mesure spectrale Γ donnée par la relation (4.10).

Enfin, la proposition suivante relie la convergence d'une suite d'intégrales symétriques α-stables à la convergence de la suite des intégrandes :

Proposition 4.28 *Soit, pour tout entier $j \geq 1$: $X_j = \int_E f_j(x)\mathrm{d}M(x)$, et soit $X = \int_E f(x)\mathrm{d}M(x)$, où M est une mesure aléatoire $S\alpha S$ dans l'espace $(E, \mathcal{E}, m)$. Alors :*

$$X_j \xrightarrow[j \to +\infty]{\mathbb{P}} X \Longleftrightarrow \lim_{j \to +\infty} \int_E |f_j - f|^\alpha \mathrm{d}m = 0. \tag{4.16}$$

Preuve de la proposition 4.28 :
Nous avons : $X_j \xrightarrow[j \to +\infty]{\mathbb{P}} X \Longleftrightarrow X_j - X \xrightarrow[j \to +\infty]{\mathbb{P}} 0$.
Or, par linéarité de l'intégrale stable : $X_j - X$ suit la loi $S\alpha S(\sigma_j)$ où $\sigma_j = \left(\int_E |f_j - f|^\alpha \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.
Donc la convergence en probabilité de $(X_j)_{j \geq 1}$ vers X équivaut à la convergence vers 0 de la suite $(\sigma_j)_{j \geq 1}$.

□

Example 4.29 Présentons une autre construction du processus de Lévy α-stable.
Considérons, pour tout $t \geq 0$:

$$X_t = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(x)\mathrm{d}M(s) = \int_0^t \mathrm{d}M(x), \tag{4.17}$$

où M est une mesure $S\alpha S$ sur l'espace $([0, +\infty[, \mathrm{Bor}([0, +\infty[, \lambda))$ (λ désignant la mesure de Lebesgue (restreinte à $[0, +\infty[$)).
Alors $X_0 = 0$, $\mathbb{P}$-ps. Et par linéarité de l'intégrale stable, pour tous $0 \leq s \leq t$:

$$X(t) - X(s) = \int_s^t \mathrm{d}M(x) = M([s,t]), \text{ qui suit la loi } S_\alpha\left(|t-s|^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0\right).$$

Alors, si $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, alors :

$$(X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})) = \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}M(x),\ \cdots, \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathrm{d}M(x)\right).$$

Les composantes de ce vecteurs sont donc des lois $S\alpha S$ indépendantes, puisque les intervalles $[t_{j-1}, t_j[$, pour tout j compris entre 2 et n, sont deux à deux disjoints (M étant indépendamment dispersée).
Ainsi ce processus vérifie toutes les propriétés caractérisant le processus de Lévy α-stable symétrique présenté dans l'exemple 4.21. Il est donc bien égal au processus de Lévy α-stable symétrique construit dans cet exemple 4.21.

Remarque 4.30 Voici à présent le théorème de représentation intégrale dans $\mathbb{R}^d$, expliquant qu'un vecteur $S\alpha S$ dans $\mathbb{R}^d$ est égal en loi à un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ dont toutes les composantes sont des intégrales stables (par rapport à la même mesure stable définie sur le même espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m)$.)

Théorème 4.31 (de représentation sur $\mathbb{R}^d$) *Soit $X = (X_1, \cdots, X_d)$ un vecteur $S\alpha S$ dans $\mathbb{R}^d$.*
Alors,

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\int_{\mathbb{S}_d} s_1 \mathrm{d}M(s), \ \cdots, \int_{\mathbb{S}_d} s_d \mathrm{d}M(s) \right), \tag{4.18}$$

où M est une mesure $S\alpha S$ sur l'espace mesuré $(\mathbb{S}_d, \mathrm{Bor}(\mathbb{S}_d), \Gamma)$, où Γ est la mesure spectrale du vecteur $(X_1, \cdots, X_d)$.

Preuve du théorème 4.31 : Le Théorème 4.13 nous donne la représentation suivante que nous qualifierons de "spectrale", pour un vecteur $S\alpha S$.
Il existe un mesure finie Γ sur $(\mathbb{S}_d, \mathrm{Bor}(\mathbb{S}_d))$ telle que, pour tout $\Theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, la fonction ϕ_X caractéristique du vecteur X est définie par :

$$\phi_X(\Theta) = \exp\left[- \int_{\mathbb{S}_d} \left| \sum_{j=1}^{d} \theta_j s_j \right|^{\alpha} \mathrm{d}\Gamma(s) \right]. \tag{4.19}$$

La Proposition 4.27 nous dit alors que la fonction caractéristique ci-dessus est celle du vecteur $\left(\int_{\mathbb{S}^d} s_1 \mathrm{d}M(s), \ \cdots, \int_{\mathbb{S}^d} s_d \mathrm{d}M(s) \right)$, où M est une mesure $S\alpha S$ sur l'espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m) = (\mathbb{S}_d, \mathrm{Bor}(\mathbb{S}_d), \Gamma)$, la mesure spectrale Γ pour ce dernier vecteur aléatoire étant donc la même que celle dans la relation (4.19)). Les fonctions caractéristiques de ces deux vecteurs étant égales :

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\int_{\mathbb{S}_d} s_1 \mathrm{d}M(s), \ \cdots, \int_{\mathbb{S}_d} s_d \mathrm{d}M(s) \right).$$

$\square$

4.6 Mesure et intégrale aléatoires stables complexes

Les deux sections précédentes peuvent être adaptées au cas complexe, comme suit :

Définition 4.32 *Soit α appartenant à $]0, 2]$[. On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m)$. Et soit $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} \mid m(A) < +\infty\}$.*

Une mesure isotrope complexe symétrique α-stable sur $\mathcal{E}_0$ de mesure de contrôle m est une fonction :

$$\widetilde{M_\alpha} : \mathcal{E}_0 \to \L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

i) $\widetilde{M_\alpha}$ *est indépendamment dispersée.*

ii) $\widetilde{M_\alpha}$ *est additive.*

iii) $\widetilde{M_\alpha}$ *est isotrope (invariante par rotation), c'est-à-dire : pour tout θ appartenant à $[0, 2\pi[$:*

$$e^{i\theta}\widetilde{M_\alpha} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \widetilde{M_\alpha}.$$

(égalité en lois de processus, ie : égalité vraie pour toutes les lois fini-dimensionnelles).

iv) Pour tout A appartenant à $\mathcal{E}_0$, $\widetilde{M_\alpha}(A)$ est une mesure complexe isotrope $S\alpha S$ de paramètre $\sigma = (m(A))^{\frac{1}{\alpha}}$.

Remarque 4.33

— Notons que (i) signifie que pour tout entier $n \geq 1$, et pour tous $A_1, \cdots, A_n$ appartenant à $\mathcal{E}_0$, deux à deux disjoints, l'indépendance des variables $\widetilde{A_\alpha}(A_1), \cdots, \widetilde{M_\alpha}(A_n)$ signifie l'indépendance des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Re}\left(\widetilde{M_\alpha}(A_1)\right) \\ \mathfrak{Im}\left(\widetilde{M_\alpha}(A_1)\right) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}\left(\widetilde{M_\alpha}(A_1)\right) \\ \mathfrak{Im}\left(\widetilde{M_\alpha}(A_1)\right) \end{pmatrix}$$

— Pour tout A appartenant à $\mathcal{E}_0$, la fonction caractéristique $\psi_{\widetilde{M_\alpha}(A)}$, est donnée, pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, par la relation :

$$\psi_{\widetilde{M_\alpha}(A)}(z) = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\ \mathfrak{Re}(\overline{z}\widetilde{M_\alpha}(A))\right)\right] = e^{-m(A)|z|^\alpha}.$$

En particulier, la variable aléatoire réelle $\mathfrak{Re}(\widetilde{M_\alpha})$ est $S\alpha S$ de paramètre σ aussi égal à $(m(A))^{\frac{1}{\alpha}}$.

— On peut alors construire une intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire complexe symétrique stable isotrope. On commence par les fonctions simples : pour tout $n \geq 1$, et pour tous $A_1, \cdots, A_n$ appartenant à $\mathcal{E}_0$, deux à deux disjoints, et pour tous $a_1, \cdots, a_n$ complexes :

$$\forall\ x \in E, f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x),$$

on définit l'intégrale de cette manière :

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \widetilde{M_\alpha}(A_k). \tag{4.20}$$

Cette intégrale $I(f) = \int_E f(x)\mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x)$ est une mesure $S\alpha S$ complexe isotrope. Sa fonction caractéristique est égale pour tout z complexe à :

$$\psi_{I(f)}(z) = \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^\alpha m(A_k)\right)|z|^\alpha\right).$$

Utilisant un argument de densité, l'intégrale peut être étendue à une fonction f appartenant à $L^\alpha_{\mathbb{C}}(E, \mathcal{E}, m)$. Nous obtenons/admettons alors :

Proposition 4.34 *Soit $\widetilde{M_\alpha}$ une mesure complexe symétrique α-stable isotrope sur l'espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m)$, alors :*

i) Pour tout f appartenant à $L^\alpha_{\mathbb{C}}(E)$, l'intégrale $L(f) = \int_E g(x)\mathrm{d}(x)$ est une variable aléatoire complexe $S\alpha S(\sigma_f)$ isotrope, de paramètre $\sigma_f = \|f\|_{L^\alpha(E)}$ et donc de fonction caractéristique, pour tout z complexe :

$$\psi_{I(f)}(z) = \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^\alpha m(A_k)\right)|z|^\alpha\right). \tag{4.21}$$

ii) Linéarité : pour toutes fonction f, g appartenant à $L^\alpha_{\mathbb{C}}(E)$, et pour tous a, b complexes, l'égalité :

$$\int_E (af(x) + bg(x))\mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x) = a\int_E f(x)\mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x) + b\int_E g(x)\mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x),$$

est $\mathbb{P}$-presque sûre.

iii) Pour tout f appartenant à $L^\alpha_{\mathbb{C}}(E)$, $\mathfrak{Re}\left(\int_E f(x)d\widetilde{M_\alpha}(x)\right)$ et $\mathfrak{Im}\left(\int_E f(x)d\widetilde{M_\alpha}(x)\right)$ sont deux variables aléatoires réelles suivant à deux la même loi $S\alpha S(\sigma_f)$ où $\sigma_f = \|f\|_{L^\alpha_{\mathbb{C}}(E)}$.

iv) Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions et soit f une fonction appartenant toutes à $L^\alpha_{\mathbb{C}}(E)$. Alors :

$$\mathfrak{Re}\left(\int_E f_n(x)d\widetilde{M_\alpha}(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathfrak{Re}\left(\int_f (x)\mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x)\right) \iff f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^\alpha_{\mathbb{C}}(E)} f.$$

5 Serie de Le Page pour les processus SαS définis par des intégrales

5.1 Série de Le Page de mesures et intégrales aléatoires SαS

Nous allons étudier le cas des mesures SαS.

Théorème 5.1 *Soit M une mesure aléatoire $S\alpha S$ sur un espace mesuré fini $(E, \mathcal{E}, m)$. Notons la mesure de probabilité :*

$$\widehat{m} = \frac{m}{m(E)}.$$

Soit $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$ la suite des instants d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité égale à 1. Et soit la suite de vecteurs indépendants et identiquement distribués $((V_j, \gamma_j))_{j\geq 1}$, et indépendante de la suite $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$, telle que :

i) Tous les V_j ont pour loi de probabilité $\widehat{m}$ sur E.

ii) Pour tout $j \geq 1$: $\mathbb{P}(\gamma_j = 1 \mid V_j) = \mathbb{P}(\gamma_j = -1 \mid V_j) = \frac{1}{2}$.

Alors (l'égalité ci-dessous est une égalité en termes de loi de processus) :

$$(M(A))_{A\in\mathcal{E}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left([c_\alpha m(E)]^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} \mathbb{1}_{(V_j\in A)} \right)_{A\in\mathcal{E}}. \tag{5.1}$$

Preuve du théorème 5.1 : Fixons $A \in \mathcal{E}$, et soient pour tout $j \geq 1$: $W_j^{(A)} = \gamma_j \mathbb{1}_{(V_j\in A)}$. Alors grâce aux hypothèses (i) et (ii), les variables $W_j^{(A)}$ sont i.i.d centrée et prennent toutes comme valeurs exactement -1, 0, et 1 et vérifiant :

$$\mathbb{E}\left[\left| W_1^{(A)} \right|^\alpha \right] = \mathbb{P}(V_1 \in A) = \widehat{m}(A).$$

En effet, l'indépendance provient du fait que W_j est une fonction (la même pour chaque j) des composantes du vecteur (γ_j, V_j), et l'hypothèse (i) nous disant que les vecteurs (γ_j, V_j) étant indépendantes identiquement distribuées, alors les $W_j^{(A)}$ sont indépendantes identiquement distribuées. Et elles prennent toutes comme valeurs $-1, 0$ et 1, car grâce à l'hypothèse (ii) :

$$\begin{aligned}
*\mathbb{P}\left(W_j^{(A)} = 0\right) &= \mathbb{P}(\gamma_j \in \{-1,1\} \mid V_j \notin A) \times \mathbb{P}(V_j \notin A) \\
&= \mathbb{P}(V_j \notin A), \\
*\mathbb{P}\left(W_j^{(A)} = -1\right) &= \mathbb{P}[(\gamma_j = -1) \cap (V_j \in A)] \\
&= \mathbb{P}(\gamma_j = -1 \mid V_j \in A) \times \mathbb{P}(V_j \in A) = \frac{\mathbb{P}(V_j \in A)}{2}, \\
*\mathbb{P}\left(W_j^{(A)} = 1\right) &= \mathbb{P}[(\gamma_j = 1) \cap (V_j \in A)] \\
&= \mathbb{P}(\gamma_j = 1 \mid V_j \in A) \times \mathbb{P}(V_j \in A) = \frac{\mathbb{P}(V_j \in A)}{2}.
\end{aligned}$$

Elles sont centrées, par un calcul simple (ou bien, on a pu observé qu'elles sont symétriques) :

$$\mathbb{E}\left(W_j^{(A)}\right) = 1 \times \frac{\mathbb{P}(V_j \in A)}{2} + (-1) \times \frac{\mathbb{P}(V_j \in A)}{2} + 0 \times \mathbb{P}(V_j \notin A) = 0.$$

Et le calcul du moment d'ordre α :

$$\mathbb{E}\left(\left|W_j^{(A)}\right|^\alpha\right) = 1 \times \frac{\mathbb{P}(V_j \in A)}{2} + |-1| \times \frac{\mathbb{P}(V_j \in A)}{2} + 0 \times \mathbb{P}(V_j \notin A) = \mathbb{P}(V_j \in A) = \widehat{m}(A).$$

D'après le Corollaire 3.39, la série $\displaystyle\sum_{j\geq 1} W_j^{(A)}\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} = \sum_{j\geq 1}\gamma_j\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}\mathbb{1}_{(V_j\in A)}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers une variable aléatoire $S_\alpha(\sigma_A,0,0)$, où $\sigma_A^\alpha = \dfrac{\widehat{m}(A)}{c_\alpha}$.

Dès lors, grâce à la Propriété 3.13 (iii), la variable aléatoire $\widetilde{M}(A)$ définie par :

$$\widetilde{M}(A) = (c_\alpha m(E))^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}\mathbb{1}_{(V_j\in A)}, \tag{5.2}$$

suit la loi $S_\alpha(\widetilde{\sigma}_A,0,0)$, où $\widetilde{\sigma}_A^\alpha = (c_\alpha m(E))\times\sigma_A = m(A)$.
Ainsi $M(A)$ possède la même loi que $\widetilde{M}(A)$.
Il reste à prouver que les lois fini-dimensionnelles des processus $(M(A))_{A\in\mathcal{E}}$ et $(\widetilde{M}(A))_{A\in\mathcal{E}}$ correspondent.
Soient $A_1,\ \cdots, A_d$ appartenant à $\mathcal{E}$ et deux à deux disjoints. Nous devons montrer que :

$$(M(A_1),\ \cdots, M(A_d)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\widetilde{M}(A_1),\ \cdots, \widetilde{M}(A_d)\right). \tag{5.3}$$

Soient $\theta_1,\ \cdots, \theta_d$ des réels, alors grâce à l'égalité (5.2) :

$$\sum_{k=1}^{d} \theta_k\widetilde{M}(A_k) = (c_\alpha m(E))^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{+\infty}\left[\gamma_j\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{d}\theta_k\mathbb{1}_{(V_j\in A_k)}\right)\right]. \tag{5.4}$$

Considérons, pour tout $j\geq 1$, $W_j = \gamma_j\displaystyle\sum_{k=1}^{d}\theta_k\mathbb{1}_{(V_j\in A_k)} = \sum_{k=1}^{d}\theta_k W_j^{(A_k)}$, alors la suite $(W_j)_{j\geq 1}$ est indépendante identiquement distribuée, encore centrée car les $W_j^{(A_k)}$, j variant, sont indépendantes identiquement distribuées et sont symétriques. Et, comme les A_k sont deux à deux disjoints :

$$\mathbb{E}\left(|W_1|^\alpha\right) = \sum_{k=1}^{d}|\theta_k|^\alpha\mathbb{P}(V_1\in A_k) = \sum_{k=1}^{d}|\theta_k|^\alpha\widehat{m}(A_k).$$

Dès lors, encore grâce au Corollaire 3.39 : $\displaystyle\sum_{j\geq 1}\gamma_j\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{d}\theta_k\mathbb{1}_{(V_j\in A_k)}\right)$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement et :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\gamma_j\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{d}\theta_k\mathbb{1}_{(V_j\in A_k)}\right) \text{ suit la loi } S_\alpha(\sigma,0,0), \text{ où } \sigma^\alpha = c_\alpha^{-1}\left(\sum_{k=1}^{d}|\theta_k|^\alpha\widehat{m}(A_k)\right). \tag{5.5}$$

De nouveau, étant données les égalités (5.4) et (5.5), grâce à la Propriété 3.13 (iii), la variable

$\sum_{k=1}^{d} \theta_k \widetilde{M}(A_k)$ suit la loi $S_\alpha(\sigma', 0, 0)$ où

$$(\sigma')^\alpha = (c_\alpha m(E))\sigma^\alpha = \sum_{k=1}^{d} |\theta_k|^\alpha m(A_k).$$

D'autre part, M étant une mesure $S\alpha S$, elle est indépendamment dispersée, et les $M(A_k)$ sont indépendantes et suivent la loi $S\alpha S(\sigma_k)$, où $\sigma_k^\alpha = m(A_k)$. Les Propriétés 3.13 (i) et (iii) donnent alors :

$$\sum_{k=1}^{d} \theta_k M(A_k) \text{ suit la loi } S_\alpha(\sigma'', 0, 0), \text{ où : } (\sigma'')^\alpha = \sum_{k=1}^{d} |\theta_k|^\alpha m(A_k) = (\sigma')^\alpha.$$

Donc les combinaisons linéaires $\sum_{k=1}^{d} \theta_k \widetilde{M}(A_k)$ et $\sum_{k=1}^{d} \theta_k M(A_k)$ ont la même loi $S\alpha S$. Ce qui clôt la démonstration.

□

Théorème 5.2 *Soit M une mesure aléatoire $S\alpha S$ sur un espace mesuré fini $(E, \mathcal{E}, m)$. Notons la mesure de probabilité :*

$$\widehat{m} = \frac{m}{m(E)}.$$

Soit $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$ la suite des instants d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité égale à 1. Et soient la suite de vecteurs indépendants et identiquement distribués $((V_j, \gamma_j))_{j\geq 1}$, et indépendante de la suite $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$, telle que :

i) Tous les V_j ont pour loi de probabilité $\widehat{m}$ sur E.

ii) Pour tout $j \geq 1 : \mathbb{P}(\gamma_j = 1 \mid V_j) = \mathbb{P}(\gamma_j = -1 \mid V_j) = \frac{1}{2}$.

Alors :

a) Pour toute fonction f appartenant à $L^\alpha(E)$, nous avons :

$$I(f) = \int_E f(x) \mathrm{d}M(x) \overset{\mathcal{L}}{=} [c_\alpha m(E)]^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} f(V_j)$$

b) Nous avons l'égalité en lois de processus :

$$(I(f))_{f\in L^\alpha(E)} \overset{\mathcal{L}}{=} [c_\alpha m(E)]^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} f(V_j) \right)_{f\in L^\alpha(E)}$$

PREUVE DU THÉORÈME 5.2 :

a) Soit f appartenant à $L^\alpha(E)$, alors pour tout $j \geq 1$, $f(V_j)$ appartient à $L^\alpha(E)$, car, par le théorème de transfert :

$$\int_\Omega |f(V_j)|^\alpha(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_E |f(v)|^\alpha \mathrm{d}\widehat{m}(v) = \frac{1}{m(E)}\int_E |f(v)|^\alpha \mathrm{d}m(v) = \frac{\|f\|^\alpha_{L^\alpha(E)}}{m(E)}. \tag{5.6}$$

Alors, de nouveau $(\gamma_j f(V_j))_{j\geq 1}$ est une suite de variables symétriques indépendantes identiquement distribuées et possèdant un moment d'ordre α, (la démonstration est analogue à celle faite dans le Théorème 5.1) alors d'après le Corollaire 3.39 :

$$[c_\alpha m(E)]^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} f(V_j) \xrightarrow[\mathbb{P}-ps]{n\to+\infty} S(f),$$

où $S(f)$ suit la loi $S(\sigma'_f, 0, 0)$, avec $\sigma'_f = \dfrac{\|f\|_{L^\alpha(E)}}{[c_\alpha m(E)]^{\frac{1}{\alpha}}}[c_\alpha m(E)]^{\frac{1}{\alpha}} = \|f\|_{L^\alpha(E)}$, Et donc également : $I(f) \overset{\mathcal{L}}{=} S(f)$.

b) Nous allons à présent prouver que les lois fini-dimensionnelles correspondent. Soit $d \geq 1$, et soient $f_1, \cdots, f_d$ dans $L^\alpha(E)$. Alors, d'après la Proposition 4.24, nous avons, pour tous réels $a_1, \cdots, a_d$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k f_k(V_j)$ appartient à $L^\alpha(E)$, et :

$$\sum_{k=1}^{d} a_k I(f_k) \overset{\mathbb{P}-ps}{=} I\left(\sum_{k=1}^{d} a_k f_k\right), \tag{5.7}$$

Et alors, $I\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k f_k\right)$ suit la loi $S_\alpha(\Sigma, 0, 0)$, où $\Sigma = \left\|\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k f_k\right\|_{L^\alpha(E)}$. D'autre part, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{d} a_k S(f_k) \overset{\mathcal{L}}{=} S\left(\sum_{k=1}^{d} a_k f_k\right), \text{ qui suit aussi la loi } S(\Sigma, 0, 0). \tag{5.8}$$

En effet, les variables aléatoires V_j pour tout $j \geq 1$ sont indépendantes identiquement distribuées, alors les variables $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k f_k(V_j)$ sont elles aussi indépendantes identiquement distribuées, et ont un moment d'ordre α, en appliquant la relation (5.6), à la variable $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k f_k(V_j)$.

Alors, encore une fois les variables : $\gamma_j \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k f_k(V_j)$, pour tout $j \geq 1$, sont indépendantes identiquement distribuées symétriques ayant un moment d'ordre α également, et d'après le Corollaire 3.39 :

$$[c_\alpha m(E)]^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{k=1}^{d} a_k f_k(V_j)\right) \xrightarrow[\mathbb{P}-ps]{n\to+\infty} S\left(\sum_{k=1}^{d} a_k f_k(V_j)\right),$$

où $S\left(\sum_{k=1}^{d} a_k f_k(V_j)\right)$ suit la loi $S(\Sigma, 0, 0)$. (les calculs sont analogues à la fin de la démonstration de (a))

Les relations (5.7) et (5.8) impliquent que : $(S(f_1), \cdots, S(f_d)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (I(f_1), \cdots, I(f_d))$. D'où l'égalité en loi de processus.

$\square$

5.2 Séries de Le Page pour des processus complexes isotropes α-stables

Remarque 5.3

- Nous ne présentons pas ici la forme la plus générale du théorème ci-dessous (plusieurs théorèmes plus généraux se trouvent dans Taqqu-Samorodnitsky [2]), nous présentons une version où l'espace E est $\mathbb{R}$. C'est cette version qui nous sera utile pour la section suivante.
- Nous allons avoir besoin d'un lemme concernant l'invariance par rotation d'une variable complexe, et présenté dans la thèse de Boutard [9]. Tout d'abord, remarquons que si une variable aléatoire complexe $Z = \mathfrak{Re}(Z) + i\mathfrak{Im}(Z)$ est invariante par rotation (pour tout θ appartenant à $[0, 2\pi[$ $e^{i\theta} Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z$), alors cela équivaut à l'égalité en lois de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, pour tout θ dans $[0, 2\pi[$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)\mathfrak{Re}(Z) - \sin(\theta)\mathfrak{Im}(Z) \\ \cos(\theta)\mathfrak{Im}(Z) + \cos(\theta)\mathfrak{Re}(Z) \end{pmatrix} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(Z) \\ \mathfrak{Im}(Z) \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Lemme 5.4 *Si une variable aléatoire complexe $Z = \mathfrak{Re}(Z) + i\mathfrak{Im}(Z)$ est invariante par rotation, alors pour tout (a, b) dans $\mathbb{R}^2$:*

$$a\mathfrak{Re}(Z) + b\mathfrak{Im}(Z) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \|(a, b)\|\mathfrak{Re}(Z).$$

Preuve du lemme 5.4 : Notons $v = (a, b)$.

- Si $\|v\| = 0$, alors $a = b = 0$. Et dans ce cas, le lemme est trivial. Supposons donc $\|v\| = 0$.

— Si $\|v\| = 1$, alors il existe un unique θ_v dans $[0, 2\pi[$, tel que :

$$a = \cos(\theta_v), \text{ et } b = -\sin(\theta_v).$$

La relation (5.9) donne alors :

$$\cos(\theta_v)\mathfrak{Re}(Z) - \sin(\theta_v)\mathfrak{Im}(Z) = a\mathfrak{Re}(Z) + b\mathfrak{Im}(Z) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathfrak{Re}(Z) = \|v\|\mathfrak{Re}(Z),$$

qui est bien l'égalité du lemme.

— Enfin si v est non nul quelconque, alors considérons $\|v\|^{-1}v$ de norme 1, en appliquant le second cas :

$$\frac{a}{\|v\|}\mathfrak{Re}(Z) + \frac{b}{\|v\|}\mathfrak{Im}(Z) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathfrak{Re}(Z) \overset{\times\|v\|}{\Longrightarrow} a\mathfrak{Re}(Z) + b\mathfrak{Im}(Z) \overset{\mathcal{L}}{=} \|(a,b)\|\mathfrak{Re}(Z).$$

□

Théorème 5.5 (représentation en série de Le Page des processus intégrals SαS complexe)

— *Soit $\widetilde{M_\alpha}$ une mesure complexe α-stable invariante par rotation sur $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.*

— *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, telle que pour tout réel t : $f(t, \cdot)$ appartient à $L^\alpha(\mathbb{R})$. Et soit alors : $X_t = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x)$.*

— *Soit ψ une mesure de probabilité de densité φ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Et soit $(Z_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées ayant toutes pour loi de probabilité ψ.*

— *Soit $(g_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires complexes indépendantes identiquement distribuées et invariantes par rotation telles que : $\mathbb{E}\left[|\mathfrak{Re}(g_1)|^\alpha\right] = 1$.*

— *La suite des instants d'arrivée $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$, d'un processus de Poisson d'intensité égale à 1, les suites $(g_j)_{j\geq 1}$ et $(Z_j)_{j\geq 1}$ sont indépendantes entre elles.*

Alors :

i) La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de processus définie pour n entier naturel non nul, pour tout réel t :

$$Y_n(t) = c_\alpha \sum_{j=1}^{n} g_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} [\varphi(Z_j)]^{-\frac{1}{\alpha}} f(t, Z_j) \tag{5.10}$$

converge $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout t vers une variable aléatoire $Y(t)$.

ii) Le processus $(Y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ainsi obtenu est égal, en lois de processus, à $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

Preuve du théorème 5.5 :

i) Fixons le réel t. Pour tout $j \geq 1$, considérons les variables aléatoires complexes :

$$V_j = g_j[\varphi(Z_j)]^{-\frac{1}{\alpha}} f(t, Z_j).$$

Comme les Z_j et les g_j sont toutes indépendantes, alors les V_j sont indépendantes. Ensuite toutes les V_j sont isotropes, puisque les g_j le sont et sont indépendantes des Z_j, alors pour tout θ dans $[0, 2\pi[$:

$$e^{i\theta} V_j = e^{i\theta} g_j[\varphi_(Z_j)]^{-\frac{1}{\alpha}} f(t, Z_j) \stackrel{\mathcal{L}}{=} g_j[\varphi_(Z_j)]^{-\frac{1}{\alpha}} f(t, Z_j) = V_j.$$

En effet, en passant par les fonctions caractéristiques, pour tout t réel, comme g_j et Z_j sont indépendantes, et grâce au théorème de transfert, puisque pour tout x réel : $\phi_{e^{i\theta} g_j}(x) = \phi_{g_j}(x)$, alors :

$$\begin{aligned}
\phi_{e^{i\theta} V_j}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \phi_{e^{i\theta} g_j} \left[t f(t, z)(\varphi(z))^{-\frac{1}{\alpha}} \right] \varphi(z) \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi_{g_j} \left[t f(t, z)(\varphi(z))^{-\frac{1}{\alpha}} \right] \varphi(z) \mathrm{d}z = \phi_{V_j}(t)
\end{aligned}$$

Pour pouvoir utiliser le Théorème 4.17, il nous reste à montrer que :

$$\mathbb{E}\left[|\mathfrak{Re}(V_j)|^\alpha \right] < +\infty.$$

Soit $\mathcal{F}_Z$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendré par les Z_j : $\mathcal{F}_Z = \sigma(\{Z_j \mid j \geq 1\})$. Et notons : $\mathbb{E}_Z$ l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\,\cdot \mid \mathcal{F}_Z]$. En appliquant le Lemme 5.4, avec $Z := g_j$, $a := \mathfrak{Re}(f(t, Z_j))$, et $b := \mathfrak{Im}(f(t, Z_j))$, conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}_Z$:

$$\mathfrak{Re}(g_j f(t, Z_j)) = \mathfrak{Re}(f(t, Z_j))\mathfrak{Re}(g_j) - \mathfrak{Im}(f(t, Z_j))\mathfrak{Im}(g_j) \stackrel{\mathcal{L}}{=} |f(t, Z_j)|\mathfrak{Re}(g_j), \quad (5.11)$$

l'égalité en loi présente étant l'égalité des lois conditionnelles de $\mathfrak{Re}(g_j f(t, Z_j))$ et $|f(t, Z_j)|\mathfrak{Re}(g_j)$ par rapport à $\mathcal{F}_Z$. Grâce à cette égalité (5.11), au fait que les g_j et les Z_j sont indépendantes, que φ est la densité des chaque Z_j, et que $\mathbb{E}(|\mathfrak{Re}(g_j)|^\alpha) = 1$, et que $f(t,\cdot)$ appartient à $L^{\alpha}(\mathbb{R})$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|\mathfrak{Re}(V_j)|^{\alpha}\right) &= \mathbb{E}\left\{\left|\mathfrak{Re}\left[g_j\varphi(Z_j)^{-\frac{1}{\alpha}}f(t,Z_j)\right]\right|^{\alpha}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{[\varphi(Z_j)]^{-1}\ \ |\mathfrak{Re}\left[g_j f(t,Z_j)\right]|^{\alpha}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}_Z\left[[\varphi(Z_j)]^{-1}\ \ |\mathfrak{Re}\left[g_j f(t,Z_j)\right]|^{\alpha}\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}_Z\left[[\varphi(Z_j)]^{-1}\ \ |f(t,Z_j)|^{\alpha}\ |\mathfrak{Re}(g_j)|^{\alpha}\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{[\varphi(Z_j)]^{-1}\ \ |f(t,Z_j)|^{\alpha}\ |\mathfrak{Re}(g_j)|^{\alpha}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{[\varphi(Z_j)]^{-1}\ \ |f(t,Z_j)|^{\alpha}\right\}\times\mathbb{E}(|\mathfrak{Re}(g_j)|^{\alpha}) \\
&= \int_{\mathbb{R}}|f(t,x)|^{\alpha}\varphi(x)\times[\varphi(x)]^{-1}\mathrm{d}x \\
&= \|f(t,\cdot)\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Théorème 4.17, et sachant par le calcul précédent que : $\mathbb{E}\left(|\mathfrak{Re}(V_j)|^{\alpha}\right) = \|f(t,\cdot)\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\mathbb{R})}$, la suite Y_n définie par la relation (5.12) converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers une variable $Y(t)$ α-stable invariante par rotation de paramètre :

$$\sigma = c_{\alpha}\times c_{\alpha}^{-1}\left[\mathbb{E}(|\mathfrak{Re}(V_1)|^{\alpha})\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \|f\|_{L^{\alpha}(\mathbb{R})}.$$

Par définition de l'intégrale stable $\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\mathrm{d}\widetilde{M_{\alpha}}(x)$ possède la même loi que $Y(t)$. Ce qu'il fallait démontrer.

ii) La démonstration est analogue à celle du (b) du Théorème 5.2. Nous n'en écrirons pas le détail.

□

Remarque 5.6 Nous avons un résultat analogue, pour des processus SαS définis par les intégrales d'une famille de fonctions par rapport à une mesure aléatoires SαS sur l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathrm{Bor}(\mathbb{R}),\lambda)$. Voici l'énoncé :

Théorème 5.7 (représentation en série de Le Page des processus intégraux réels SαS)

— *Soit M une mesure complexe α-stable symétrique sur $(\mathbb{R},\mathrm{Bor}(\mathbb{R}),\lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.*

— *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, telle que pour tout réel t : $f(t,\cdot)$ appartient à $L^{\alpha}(\mathbb{R})$.*
Et soit alors : $X_t = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}M(x)$.

— *Soit ψ une mesure de probabilité de densité φ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Et soit $(Z_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées ayant toutes pour loi de probabilité ψ.*
— *Soit $(g_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées et symétriques telles que : $\mathbb{E}\left[|\mathfrak{Re}(g_1)|^\alpha\right] = 1$.*
— *La suite des instants d'arrivée $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$, d'un processus de Poisson d'intensité égale à 1, les suites $(g_j)_{j\geq 1}$ et $(Z_j)_{j\geq 1}$ sont indépendantes entre elles.*

Alors :

i) La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de processus définie pour n entier naturel non nul, pour tout réel t :

$$Y_n(t) = c_\alpha \sum_{j=1}^{n} g_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} [\varphi(Z_j)]^{-\frac{1}{\alpha}} f(t, Z_j) \tag{5.12}$$

converge $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout t vers une variable aléatoire $Y(t)$.

ii) Le processus $(Y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ainsi obtenu est égal, en lois de processus, à $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

5.3 Utilisation des séries de Le Page

Cette section montre une utilisation majeure des séries de Le Page : l'obtention de versions d'un processus (réel harmonisable) dont les trajectoires sont höldériennes. Pour faire l'exposé de cette partie, j'ai étudié plusieurs articles, deux de Kôno-Maejima, un de Dozzi-Chevchenko, puis enfin la thèse de Boutard. Les arguments étaient incomplets sur les deux premiers articles pour des variantes de processus réel harmonisable fractionnaire et pour des résultats plus faibles, celui de Dozzi-Chevchenko de même mais présentant le processus le plus général (multifractionnaire) et le résultat le plus optimal mais une démonstration incomplète, et dans la thèse de Boutard, [9] le cheminement le plus complet, mais pour un processus réel harmonisable fractionnaire. Je présente alors une synthèse : une démonstration complète et adaptée au processus stable réel harmonisable multifractionnaire, avec une optimisation des conditions de continuité de la fonction de Hurst H.

Définition 5.8 *Soient α un réel appartenant à $]1, 2[$ et $\widetilde{M_\alpha}$ une mesure $S\alpha S$ complexe isotrope sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$.*

— *Soit H un réel appartenant à $]0, 1[$*

Un processus stable réel fractionnaire harmonisable de paramètre de Hurst H et d'indice de stabilité α est un processus $(Z_H)_{t\in\mathbb{R}}$ tel que :

$$Z_H(t) = \mathfrak{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx} - 1}{|x|^{\frac{1}{\alpha}+H}} \mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x)\right). \tag{5.13}$$

— *Soit maintenant une fonction* $H : \mathbb{R} \longrightarrow]0,1[$
Un processus stable réel multifractionnaire harmonisable de fonction de Hurst H*, et d'indice de stabilité* α *est un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *tel que :*

$$X(t) = \mathfrak{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}-1}{|x|^{\frac{1}{\alpha}+H(t)}} \mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x)\right). \tag{5.14}$$

Ainsi, pour tout réel t : $X(t) = Z_{H(t)}(t)$.

Théorème 5.9 *Supposons que la fonction de Hurst* $H : \mathbb{R} \to]0,1[$, *est telle que :*

— *Pour tout* t *réel :*

$$0 < \widehat{H} = \inf_{t\in\mathbb{R}} H(t) \leq H(t) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} H(t) = \widetilde{H} < 1.$$

— *La fonction* H *vérifie la propriété de continuité :*

$$\exists\ c_H > 0 \mid \forall\ t,s \in \mathbb{R} : |H(t) - H(s)| \leq c_H\ \eth(|t-s|) \tag{5.15}$$

où, pour tout $\delta > 0$: $\eth(\delta) = \delta^{\widehat{H}}\,(1 + |\log(\delta)|)^{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)}$.

Alors, le processus stable réel harmonisable multifractionnaire X *possède une version* $\widetilde{X}$ *ayant ses trajectoires* γ*-höldériennes, pour tout* $0 < \gamma < \widehat{H}$. *Plus précisément,* $\mathbb{P}$*-presque tout* ω *de* Ω, *pour tout* $T > 0$, *et pour tout* $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{s,t\in[-T,T]} \left[\frac{\left|\widetilde{X}(t,\omega) - \widetilde{X}(s,\omega)\right|}{|t-s|^{\widehat{H}}\,(1 + |\log(|t-s|)|)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right] < +\infty. \tag{5.16}$$

Commentaire 5.10 *L'énoncé du théorème ci-dessus optimise le théorème exposé dans l'article de Dozzi et Chevchenko [8], qui lui donne juste comme hypothèse sur la fonction* H *qu'elle soit* γ*-höldérienne pour un certain réel* $\gamma > \widetilde{H}$.

Remarque 5.11 Voici quelques remarques préliminaires.

— Considérons la fonction φ_ε définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon |x|^{-1}\,[1 + |\log(|x|)|]^{-1-\varepsilon}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

Déterminons c_ε telle que φ_ε soit une densité de probabilité.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1 &\Longleftrightarrow 2c_\varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+|\log(x)|)^{1+\varepsilon}} = 1 \\
&\Longleftrightarrow 2c_\varepsilon \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1-\log(x))^{1+\varepsilon}} + 2c_\varepsilon \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+\log(x))^{1+\varepsilon}} = 1 \\
&\Longleftrightarrow 2c_\varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon\,(1-\log(x))^{\varepsilon}}\right]_0^1 - 2c_\varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon\,(1+\log(x))^{\varepsilon}}\right]_1^{+\infty} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \frac{4}{\varepsilon}c_\varepsilon = 1 \Longleftrightarrow c_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{4}|x|^{-1}\left[1+|\log(|x|)|\right]^{-1-\varepsilon}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}. \tag{5.17}$$

— Rappelons la règle de convergence pour les intégrales de Bertrand :

$$\begin{aligned}
&a)\forall\ 1 \leq \gamma \leq e : \int_\gamma^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,(\log(x))^\beta} < +\infty \Longleftrightarrow [(\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)], \\
&b)\forall\ \frac{1}{e} \leq \delta \leq 1 : \int_0^{\delta} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,|\log(x)|^\beta} < +\infty \Longleftrightarrow [(\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)].
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Les intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,[1+\log(x)]^\beta}, \text{ et } \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,[1+|\log(x)|]^\beta}$$

vont apparaître dans la démonstration. D'une part, avec le changement $u = te$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,[1+\log(x)]^\beta} = e^{\alpha-1}\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha(\log(u))^\beta}.$$

D'autre part, avec le changement $v = \dfrac{e}{t}$:

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,[1+|\log(t)|]^\beta} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,[1-\log(t)]^\beta} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,\left[\log\left(\frac{e}{t}\right)\right]^\beta} = e^{1-\alpha}\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v^{2-\alpha}\,[\log(v)]^\beta}.$$

Ainsi, grâce à la règle (5.18)

$$\begin{aligned}
\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,[1+|\log(t)|]^\beta} < +\infty &\Longleftrightarrow [(2-\alpha > 1) \text{ ou } (2-\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)] \\
&\Longleftrightarrow [(\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)].
\end{aligned}$$

En résumé, nous retiendrons la règle :

$$\begin{aligned} &a) \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \left[1+\log(x)\right]^\beta} < +\infty \Longleftrightarrow [(\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)], \\ &b) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \left[1+|\log(x)|\right]^\beta} < +\infty \Longleftrightarrow [(\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)]. \end{aligned} \tag{5.19}$$

— Une inégalité qui sera utile :

$$\forall \beta > 0, \forall t \in \mathbb{R} : \left|e^{it} - 1|\right|^\beta \leq \min\left(|t|^\beta, 2^\beta\right) \leq 2^\beta \min(|t|^\beta, 1). \tag{5.20}$$

En effet :

$$\left|e^{it} - 1\right| \leq \left|e^{it}\right| + 1 = 2, \text{ et : } \left|e^{it} - 1\right| = \left|e^{i\frac{t}{2}}\right| \times \left|2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leq 2 \times \frac{|t|}{2} = |t|.$$

Donc, la fonction $x \mapsto x^\beta$ étant croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} &\left|e^{it} - 1\right| \leq \min(|t|, 2) \leq \min(2|t|, 2) \leq 2\min(|t|, 1) \\ \Longrightarrow &\left|e^{it} - 1\right|^\beta \leq \min(|t|^\beta, 2^\beta) \leq \min(2^\beta |t|^\beta, 2^\beta) \leq 2^\beta \min(|t|^\beta, 1). \end{aligned}$$

— Nous aurons enfin besoin d'un lemme qui concerne les lois gaussiennes :

Lemme 5.12 *Si une variable aléatoire réelle N suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Alors pour tout $u > 0$:*

$$\mathbb{P}\left(|N| > u\right) \leq 2\, \frac{\sigma e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} u}.$$

Preuve du lemme 5.12 : En utilisant la parité, puis un changement de variable $v = t^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|N| > u\right) &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u^2}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{v}} \mathrm{d}v \\ &\leq \frac{2}{u\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u^2}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v}{2\sigma^2}}}{2} \mathrm{d}v = 2\, \frac{\sigma e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} u}. \end{aligned}$$

$\square$

Preuve du théorème 5.9 :

Nous avons :

$$(X(t))_{t\in\mathbb{R}} = \left(\mathfrak{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1\right) |x|^{-H(t) - \frac{1}{\alpha}} \mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x)\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}.$$

Soit

$$(Y(t))_{t\in\mathbb{R}} = \left(c_\alpha \mathfrak{Re}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} g_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} \varphi_\varepsilon(Z_j)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(e^{itZ_j} - 1\right) |Z_j|^{-H(t) - \frac{1}{\alpha}}\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}, \tag{5.21}$$

où :

— φ_ε st la densité de probabilité définie par l'égalité (5.17).
— $(g_j)_{j\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires complexes indépendantes identiquement distribuées sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ centrées Gaussiennes.
— $(\Gamma_j)_{j\geq 1}$ est la suite des instants d'arrêt d'un processus de Poissons d'intensité 1 sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
— $(Z_j)_{j\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dont la loi est absolument continue et ayant comme densité par rapport à λ la fonction φ_ε.
— Les suite de variables aléatoires $(g_j)_{j\geq 1}, (\Gamma_j)_{j\geq 1}$, et $(Z_j)_{j\geq 1}$ sont indépendantes.

Le Théorème 5.5 nous dit que ces deux processus ont la même loi.
Considérons les sous-tribus de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}_\Gamma = \sigma\left[\{\Gamma_j \mid j \geq 1\}\right], \text{ et : } \mathcal{F}_{\Gamma,Z} = \sigma\left[\{\Gamma_j \mid j \geq 1\} \cup \{Z_j \mid j \geq 1\}\right].$$

Et notons $\mathbb{E}_\Gamma$ et $\mathbb{E}_{\Gamma,Z}$ les espérances conditionnelles respectivement par rapport aux sous-tribus $\mathcal{F}_\Gamma$, et $\mathcal{F}_{\Gamma,Z}$:

$$\mathbb{E}_\Gamma = \mathbb{E}[\ \cdot\ , \mathcal{F}_\Gamma], \text{ et } \mathbb{E}_{\Gamma,Z} = \mathbb{E}[\ \cdot\ , \mathcal{F}_{\Gamma,Z}].$$

Et notons, pour tout (t, x) de $\mathbb{R}^2$:

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{e^{itx} - 1}{|x|^{H(t)+\frac{1}{\alpha}}}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

L'égalité (5.21) implique que pour tous réels t, s, $\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[Y(t) - Y(s)\right]$ possède une loi gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$. Alors nous avons, grâce au lemme de Fatou, et utilisant le fait que $(g_j)_{j\geq 1}$ est une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, et indépendantes des suites $(\xi_j)_{j\geq 1}, (\Gamma_j)_{j\geq 1}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[|Y(s)-Y(t)|^2\right] \leq\ c_\alpha^2\ \mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left\{\lim_{n\to+\infty}\ \left|\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}\left[\varphi_\varepsilon(Z_j)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\left[f(s,Z_j)-f(t,Z_j)\right]g_j\right|^2\right\}\\
&\leq c_\alpha^2\ \liminf_{n\to+\infty}\ \mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}}\left[\varphi_\varepsilon(Z_j)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\left[f(s,Z_j)-f(t,Z_j)\right]g_j\right|^2\right\}\\
&= c_\alpha^2\ \liminf_{n\to+\infty}\ \mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left\{\sum_{1\leq j,k\leq n}\left[\Gamma_j\Gamma_k\varphi_\varepsilon(Z_j)\varphi_\varepsilon(Z_k)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\overline{\left(f(s,Z_j)-f(t,Z_j)\right)}\left(f(s,Z_k)-f(t,Z_k)\right)\overline{g_j}g_k\right\}\\
&= c_\alpha^2\ \liminf_{n\to+\infty}\ \sum_{1\leq j,k\leq n}\left[\Gamma_j\Gamma_k\varphi_\varepsilon(Z_j)\varphi_\varepsilon(Z_k)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\overline{\left(f(s,Z_j)-f(t,Z_j)\right)}\left(f(s,Z_k)-f(t,Z_k)\right)\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left(\overline{g_j}g_k\right)\\
&= c_\alpha^2\ \liminf_{n\to+\infty}\ \sum_{j=1}^{n}\Gamma_j^{-\frac{2}{\alpha}}\left[\varphi_\varepsilon(Z_j)\right]^{-\frac{2}{\alpha}}\left|f(s,Z_j)-f(t,Z_j)\right|^2\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left(|g_1|^2\right)\\
&= c_\alpha^2\ \mathbb{E}\left(|g_1|^2\right)\times\aleph(t,s),
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

où

$$
\aleph(t,s)=\sum_{j=1}^{+\infty}\Gamma_j^{-\frac{2}{\alpha}}\left[\varphi_\varepsilon(Z_j)\right]^{-\frac{2}{\alpha}}\left|f(s,Z_j)-f(t,Z_j)\right|^2,
$$

les (in)égalités étant $\mathbb{P}$-presque sûres, la dernière égalité venant du fait que les termes sont positifs.

Commentaire 5.13 *Dans les deux articles, l'un de Maejima, l'autre de Dozzi-Chevchenko, ainsi que la thèse de Boutard, [9] dans la succession d'inégalités $\mathbb{P}$-presque sûres, ils annoncent des égalités $\mathbb{P}$-presque sûres partout. Or, il s'agit d'être prudent. Considérant d'abord les parties réelles des processus dans mon mémoire, la première ligne est a priori une inégalité (pour tout complexe z : $|\mathfrak{Re}(z)|^2\leq|z|^2$) Ensuite la deuxième ligne, une convergence dominée ne peut fonctionner, puisque sinon le membre de gauche $\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[|Y(s)-Y(t)|^2\right]$ serait un élément de $L^1(\Omega)$, ce qui est faux puisque la variable $Y(t)-Y(s)$ est α-stable, (pour $1<\alpha<2$). Ayant cherché un argument de type équi-intégrabilité, puis de croissance de type convergence monotone, moins forts que la convergence dominée, je ne suis pas parvenu à justifier qu'il s'agissait d'une égalité. Alors par prudence j'ai fait usage du lemme de Fatou. Ayant obtenu une inégalité, la démonstration se complique à l'étape 3, concernant des variances de lois normales, mais la démonstration aboutit bien au résultat annoncé du théorème.*

Nous avons, pour tous réels x, s, t :

$$
\begin{aligned}
|f(t,x)-f(s,x)| &= \left|\left(e^{itx}-1\right)|x|^{-\left(H(t)+\frac{1}{\alpha}\right)}-\left(e^{isx}-1\right)|x|^{-\left(H(s)+\frac{1}{\alpha}\right)}\right| \\
&= \left|\left(e^{itx}-e^{isx}\right)|x|^{-\left(H(t)+\frac{1}{\alpha}\right)}+\left(e^{isx}-1\right)\left(|x|^{-\left(H(t)+\frac{1}{\alpha}\right)}-|x|^{-\left(H(s)+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\right| \\
&\leq |x|^{-\frac{1}{\alpha}}\left[\left|e^{itx}-e^{isx}\right||x|^{-H(t)}+\left|e^{isx}-1\right|\left||x|^{-H(t)}-|x|^{-H(s)}\right|\right].
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

Considérons la fonction p_x définie sur $\mathbb{R}$, et qui à y associe $p_x(y) = |x|^{-y} = e^{-\log(|x|)y}$. Sa dérivée est : $p_x'(y) = -\log(|x|)|x|^{-y}$. Alors le théorème des accroissement finis pour p_x appliqué aux réels $H(t)$, et $H(s)$ nous donne l'existence d'un réel u compris entre $H(s)$ et $H(t)$ tel que :

$$
\begin{aligned}
\left||x|^{-H(t)}-|x|^{-H(s)}\right| &= |\log(|x|)| \times |x|^{-u}|H(t)-H(s)| \\
&\leq |\log(|x|)| \max\left(|x|^{-\widetilde{H}}, |x|^{-\widehat{H}}\right)|H(t)-H(s)|.
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

En utilisant l'inégalité (5.24) dans l'inégalité (5.23), puis la propriété de continuité de H (5.15), nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
|f(t,x)-f(s,x)| \leq\ & |x|^{-\frac{1}{\alpha}}\left[\left|e^{isx}\right|\left|e^{i(t-s)x}-1\right||x|^{-H(t)}\right] \\
&+ |x|^{-\frac{1}{\alpha}}\left[\left|e^{isx}-1\right| \times |\log(|x|)| \max\left(|x|^{-\widetilde{H}}, |x|^{-\widehat{H}}\right)|H(t)-H(s)|\right]. \\
\leq\ & 2|x|^{-\frac{1}{\alpha}}\left[\min(|t-s||x|,1)|x|^{-H(t)}\right] \\
&+ 2|x|^{-\frac{1}{\alpha}}\left[\min(|s||x|,1)|\log(|x|)| \max\left(|x|^{-\widetilde{H}}, |x|^{-\widehat{H}}\right)|H(t)-H(s)|\right] \\
\leq\ & 2|x|^{-\frac{1}{\alpha}}\min(|t-s||x|,1)\max\left(|x|^{-\widetilde{H}}, |x|^{-\widehat{H}}\right) \\
&+ 2c_H|x|^{-\frac{1}{\alpha}}\min(|s||x|,1)|\log(|x|)| \max\left(|x|^{-\widetilde{H}}, |x|^{-\widehat{H}}\right)\eth(|t-s|).
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Soient pour tout δ tel que $0 < \delta < \min(1, T)$ et t, s dans $[-T, T]$, tels que $|t-s| < \delta$.
Nous allons chercher à majorer $\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[|Y(t)-Y(s)|^2\right]$.
En appliquant l'inégalité (5.25), pour $x = Z_j$:

$$
\begin{aligned}
|f(t,Z_j)-f(s,Z_j)| \leq\ & 2\max(c_H,T,1)|Z_j|^{-\frac{1}{\alpha}}\max\left[|Z_j|^{-\widetilde{H}}, |Z_j|^{-\widehat{H}}\right] \\
&\times\left[\min(\delta|Z_j|,1)+\min(|Z_j|,1)|\log(|Z_j|)|\eth(\delta)\right].
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

En élevant au carré, et en utilisant de l'inégalité : pour tous réels a,b : $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$:

$$\begin{aligned}
|f(t,Z_j)-f(s,Z_j)|^2 &\leq 4\max(c_H^2,T^2,1)|Z_j|^{-\frac{2}{\alpha}}\max\left[|Z_j|^{-2\widetilde{H}},|Z_j|^{-2\widehat{H}}\right] \\
&\quad\times\left[\min(\delta|Z_j|,1)+\min(|Z_j|,1)|\log(|Z_j|)|\eth(\delta)\right]^2. \\
&\leq 8\max(c_H^2,T^2,1)|Z_j|^{-\frac{2}{\alpha}}\max\left[|Z_j|^{-2\widetilde{H}},|Z_j|^{-2\widehat{H}}\right] \\
&\quad\times\left[\min(\delta^2|Z_j|^2,1)+\min(|Z_j|^2,1)|\log(|Z_j|)|^2(\eth(\delta))^2\right].
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Alors nous obtenons, en désignant par c_0 la constante : $8\max(T^2,c_H^2,1)$:

$$\aleph(s,t) \leq c_0\,\sqsupset(\delta) \tag{5.28}$$

où $\sqsupset(\delta)$ désigne :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(|Z_j|\Gamma_j\varphi_\varepsilon(Z_j))^{-\frac{2}{\alpha}}\max\left(|Z_j|^{-2\widehat{H}},|Z_j|^{-2\widetilde{H}}\right)\left[\min(\delta^2|Z_j|^2,1)+\min(|Z_j|^2,1)|\log(|Z_j|)|^2(\eth(\delta))^2\right]. \tag{5.29}$$

En désignant par c_1 la constante : $c_\alpha^2 c_0$, et en faisant usage de l'inégalité (5.26), $\mathbb{P}$-presque sûrement :

$$\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[|Y(t)-Y(s)|^2\right] \leq c_1\mathbb{E}[|g_1|^2]\sqsupset(\delta), \tag{5.30}$$

Décrivons à ce stade les quatre étapes de la démonstration :

— Étape 1 : Nous allons prouver qu'il existe une constante $c_3>0$ telle que $\mathbb{P}$-presque sûrement :

$$\mathbb{E}_\Gamma\left[\sqsupset(\delta)\right] \leq c_3\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\Gamma_j^{-\frac{2}{\alpha}}\right)\times\delta^{2\widehat{H}}\left[1+|\log(|\delta|)|\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)(1+\varepsilon)} \tag{5.31}$$

— Étape 2 : Nous allons prouver que :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{j\to+\infty}\frac{\sqsupset\left(2^{-j}\right)}{2^{-2j\widehat{H}}j^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}}=0\right)=1. \tag{5.32}$$

— Étape 3 : On note pour tout $j\in\mathbb{N}$, l'ensemble dyadique $\mathcal{D}_{j,T}$ de niveau j dans $[-T,T]$, ainsi que l'ensemble $\mathcal{D}_T$ des nombres dyadiques dans $[-T,T]$, soit :

$$\mathcal{D}_{j,T}=\left\{\frac{k}{2^j}\mid k\in[-2^jT,2^jT]\cap\mathbb{Z}\right\},\ \text{et}\ \mathcal{D}_T=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_{j,T}.$$

Nous savons que $\mathcal{D}_T$ est dense dans $[-T,T]$. Nous allons alors montrer qu'il existe une constante $c_1>0$ telle que l'évènement $\Omega_1(T)$ suivant est $\mathbb{P}$-presque sûr :

$$\widetilde{\Omega_T}=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\bigcap_{\substack{s,t\in\mathcal{D}_T\\|s-t|\leq 2^{-j}}}\left\{|X(t)-X(s)|\leq c_1|t-s|^{\widehat{H}}\left[1+|\log(|t-s|)|\right]^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}\right\}. \tag{5.33}$$

— Étape 4 : Nous construisons une modification $\left(\widetilde{X_T}(t)\right)_{t\in[-T,T]}$ de $(X(t))_{t\in[-T,T]}$ qui satisfait : pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega_T}$, il existe une constante $c_{\omega,T} > 0$ telle que pour tous $s,t \in [-T,T]$:

$$\left|\widetilde{X_T}(t) - \widetilde{X_T}(s)\right| \leq c_{\omega,T}|t-s|^{\widehat{H}} \left[1 + |\log(|t-s|)|\right]^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}. \tag{5.34}$$

Étape 1 : Comme $(\Gamma_j)_{j\geq 1} \perp\!\!\!\perp (Z_j)_{j\geq 1}$, alors par convergence monotone :

$$\mathbb{E}_\Gamma\left[\,\beth(\delta)\right] = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |\Gamma_j|^{-\frac{2}{\alpha}}\right) \times \left[\mathcal{I}_1(\delta) + \mathcal{I}_2(\delta)\right], \tag{5.35}$$

où :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1(\delta) = \mathbb{E}\left[(|Z_1|\varphi_\varepsilon(Z_1))^{-\frac{2}{\alpha}} \max\left(|Z_1|^{-2\widetilde{H}}, |Z_1|^{-2\widehat{H}}\right) \min\left(\delta^2|Z_1|^2, 1\right)\right] \\ \mathcal{I}_2(\delta) = \mathbb{E}\left[(|Z_1|\varphi_\varepsilon(Z_1))^{-\frac{2}{\alpha}} \max\left(|Z_1|^{-2\widetilde{H}}, |Z_1|^{-2\widehat{H}}\right) \min\left(|Z_1|^2, 1\right) |\log(|Z_1|)|^2 \left(\eth(\delta)\right)^2\right] \end{cases}.$$

Nous allons majorer les intégrales $\mathcal{I}_1(\delta)$, et $\mathcal{I}_2(\delta)$ afin d'obtenir l'inégalité (5.31). Z_1 ayant comme loi $\varphi_\varepsilon.\lambda$, alors, utilisant la parité :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(\delta) &= \int_{\mathbb{R}} (\varphi_\varepsilon)^{1-\frac{2}{\alpha}} |x|^{-\frac{2}{\alpha}} \max\left(|x|^{-2\widetilde{H}}, |x|^{-2\widehat{H}}\right) \min\left(\delta^2|x|^2, 1\right) \mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{+\infty} (\varphi_\varepsilon)^{1-\frac{2}{\alpha}} x^{-\frac{2}{\alpha}} \max\left(x^{-2\widetilde{H}}, x^{-2\widehat{H}}\right) \min\left(\delta^2x^2, 1\right) \mathrm{d}x \\ &= 2\left[\,\mathcal{I}_{1,1}(\delta) + \mathcal{I}_{1,2}(\delta)\right], \end{aligned} \tag{5.36}$$

où :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{1,1}(\delta) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\delta}} (\varphi_\varepsilon(x))^{1-\frac{2}{\alpha}} x^{-\frac{2}{\alpha}} \delta^2 x^2 \max\left(x^{-2\widehat{H}}, x^{-2\widetilde{H}}\right) \mathrm{d}x \\ \mathcal{I}_{1,2}(\delta) = \displaystyle\int_{\frac{1}{\delta}}^{+\infty} (\varphi_\varepsilon(x))^{-\frac{2}{\alpha}} x^{-\frac{2}{\alpha}} \max\left(x^{-2\widehat{H}}, x^{-2\widetilde{H}}\right) \mathrm{d}x \end{cases}.$$

D'une part, effectuant le changement de variable $y = \delta x$, dans $\mathcal{I}_{1,1}(\delta)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1,1}(\delta) &= \int_0^{\frac{1}{\delta}} \delta^2 \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} x^{2-\frac{2}{\alpha}} \left[x\left(1 + |\log(x)|\right)^{1+\varepsilon}\right]^{-\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)} \max\left(x^{-2\widehat{H}}, x^{-2\widetilde{H}}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{\delta}} \delta^2 \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} x \max\left(x^{-2\widehat{H}}, x^{-2\widetilde{H}}\right) \left(1 + |\log(x)|\right)^{-(1+\varepsilon)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} y \max\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^{-2\widehat{H}}, \left(\frac{y}{\delta}\right)^{-2\widetilde{H}}\right] \left[1 + \left|\log\left(\frac{y}{\delta}\right)\right|\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)(1+\varepsilon)} \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Comme $0 < \delta < 1$, alors $x \mapsto \delta^x$ décroit sur $\mathbb{R}$, et donc :

$$\min\left(\delta^{-2\widehat{H}}, \delta^{-2\widetilde{H}}\right) = \max\left(\delta^{2\widehat{H}}, \delta^{2\widetilde{H}}\right) = \delta^{2\widehat{H}}.$$

Dès lors :

$$\mathcal{I}_{1,1}(\delta) = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \delta^{2\widehat{H}} \int_0^1 y \max\left(y^{-2\widehat{H}}, y^{-2\widetilde{H}}\right) \left[1 + \left|\log\left(\frac{y}{\delta}\right)\right|\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)(1+\varepsilon)} \mathrm{d}y. \quad (5.37)$$

y appartenant à $]0,1[$, alors $y^{-2} \in]1,+\infty[$, et alors $x \mapsto y^{-2x}$ croit sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall\ y \in]0,1[:\ \max\left(y^{-2\widehat{H}}, y^{-2\widetilde{H}}\right) = y^{-2\widetilde{H}}.$$

Ainsi l'intégrale dans (5.37) devient :

$$\mathcal{I}_{1,1}(\delta) = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \delta^{2\widehat{H}} \int_0^1 y^{1-2\widetilde{H}} \left[1 + \left|\log\left(\frac{y}{\delta}\right)\right|\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right))} \mathrm{d}y.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} 1 + \left|\log\left(\frac{y}{\delta}\right)\right| &= 1 + |\log(y) - \log(\delta)| \\ &\leq 1 + |\log(y)| + |\log(\delta)| \\ &\leq 1 + |\log(y)| + |\log(\delta)| + |\log(y)||\log(\delta)| \\ &= (1 + |\log(y)|)(1 + |\log(\delta)|). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Et comme $(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right) > 0$, l'inégalité ci-dessus devient :

$$\left[1 + \left|\log\left(\frac{y}{\delta}\right)\right|\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \leq [1 + |\log(y)|]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} [1 + |\log(\delta)|]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)}. \quad (5.39)$$

Utilisant l'inégalité (5.39), l'égalité (5.37) devient :

$$\mathcal{I}_{1,1}(\delta) \leq \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \delta^{2\widehat{H}} \left(\int_0^1 y^{1-2\widetilde{H}} [1 + |\log(y)|]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \mathrm{d}y\right) [1 + |\log(\delta)|]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)}.$$

D'après la règle (5.19), comme $2\widetilde{H} - 1 < 1$, alors :

$$\int_0^1 y^{1-2\widetilde{H}} [1 + |\log(y)|]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \mathrm{d}y < +\infty,$$

et donc, en posant la constante :

$$c_{1,1} = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \left(\int_0^1 y^{1-2\widetilde{H}} [1 + |\log(y)|]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \mathrm{d}y\right),$$

nous obtenons :

$$\mathcal{I}_{1,1}(\delta) \leq c_{1,1}\delta^{2\widehat{H}} [1 + |\log(\delta)|]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)}. \quad (5.40)$$

D'autre part, en procédant de même pour $\mathcal{I}_{1,2}(\delta)$, par changement de variable $y = \delta x$:

$$\mathcal{I}_{1,2}(\delta) = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \delta^{2\widehat{H}} \int_1^{+\infty} \max\left(y^{-2\widehat{H}}, y^{-2\widetilde{H}}\right) y^{-1} \left(1 + \left|\log\left(\frac{y}{\delta}\right)\right|\right)^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \mathrm{d}y.$$

Cette fois, $y > 1$, alors $\max\left(y^{-2\widehat{H}}, y^{-2\widetilde{H}}\right) = y^{-2\widehat{H}}$. Faisant usage de l'inégalité (5.39) :

$$\mathcal{I}_{1,2}(\delta) \leq \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \delta^{2\widehat{H}} \left(\int_1^{+\infty} y^{-1-2\widehat{H}} \left[1+\log(y)\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \mathrm{d}y\right) \left[1+|\log(\delta)|\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \tag{5.41}$$

D'après la règle (5.19), comme $2\widehat{H}+1 > 1$, alors :

$$\int_1^{+\infty} y^{-1-2\widehat{H}} \left[1+\log(y)\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \mathrm{d}y < +\infty.$$

Et donc, en posant par la constante :

$$c_{1,2} = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \left(\int_1^{+\infty} y^{-1-2\widehat{H}} \left[1+\log(y)\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \mathrm{d}y\right),$$

nous obtenons également :

$$\mathcal{I}_{1,2}(\delta) \leq c_{1,2} \delta^{2\widehat{H}} \left[1+|\log(\delta)|\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)}. \tag{5.42}$$

Passons à la majoration de $\mathcal{I}_2(\delta)$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_2(\delta) = \\
&\mathbb{E}\left[\left(|Z_1|\varphi_\varepsilon(Z_1)\right)^{-\frac{2}{\alpha}} \max\left(|Z_1|^{-2\widetilde{H}}, |Z_1|^{-2\widehat{H}}\right) \min\left(|Z_1|^2, 1\right) |\log(|Z_1|)|^2 \left(\eth(\delta)\right)^2\right] \\
&= 2\left(\eth(\delta)\right)^2 \int_0^{+\infty} \left(\varphi_\varepsilon(x)\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} x^{-\frac{2}{\alpha}} \max\left(x^{-2\widehat{H}}, x^{-2\widetilde{H}}\right) \min(x^2, 1) \left|\log(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \left(\eth(\delta)\right)^2 \int_0^{+\infty} \frac{\max\left(x^{-2\widehat{H}}, x^{-2\widetilde{H}}\right) \min(x^2, 1)}{x\left[1+|\log(x)|\right]^{(1+\varepsilon)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}} |\log(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \left(\eth(\delta)\right)^2 \left[\mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,2}\right],
\end{aligned} \tag{5.43}$$

où :

$$\begin{cases}
\mathcal{I}_{2,1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\max\left(x^{-2\widehat{H}}, x^{-2\widetilde{H}}\right) \min(x^2, 1)}{x\left[1+|\log(x)|\right]^{(1+\varepsilon)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}} |\log(x)|^2 \mathrm{d}x \\
\mathcal{I}_{2,2} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\max\left(x^{-2\widehat{H}}, x^{-2\widetilde{H}}\right) \min(x^2, 1)}{x\left[1+|\log(x)|\right]^{(1+\varepsilon)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}} |\log(x)|^2 \mathrm{d}x
\end{cases}.$$

D'une part, comme $|\log(x)|^2 \leq (1+|\log(x)|)^2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2,1} &= \int_0^1 x^{1-2\widetilde{H}} \left[1+|\log(x)|\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} (\log(x))^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 x^{1-2\widetilde{H}} \left[1+|\log(x)|\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)+2} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

intégrale qui converge d'après la règle (5.19) car $1 - 2\widetilde{H} < 1$. D'autre part :

$$\mathcal{I}_{2,1} \leq \int_0^1 x^{-1-2\widehat{H}} \left[1 + |\log(x)|\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)+2} \mathrm{d}x,$$

intégrale qui converge, d'après la règle (5.19) car $1 + 2\widehat{H} > 1$.

Dès lors, en notant la constante :

$$c_2 = 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \left[\mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,2}\right],$$

en rappelant que : $\eth(\delta) = \delta^{\widehat{H}} \left[1 + |\log(\delta)|\right]^{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)}$:

$$\mathcal{I}_{\in}(\delta) \leq c_2 \left(\eth(\delta)\right)^2 = c_2 \delta^{2\widehat{H}} \left[1 + |\log(\delta)|\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)} \leq c_2 \delta^{2\widehat{H}} \left[1 + |\log(\delta)|\right]^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)}. \tag{5.44}$$

Combinant les inégalités (5.40), (5.42) et (5.44), et en posant $c_3 = \max(c_{1,1}, c_{1,2}, c_2)$, l'inégalité (5.35) devient finalement :

$$\mathbb{E}_\Gamma \left[\, \beth(\delta)\right] \leq c_3 \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \Gamma_j^{-\frac{2}{\alpha}}\right) \times \delta^{2\widehat{H}} \left[1 + |\log(|\delta|)|\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)(1+\varepsilon)},$$

l'inégalité (5.31) annoncée.

Étape 2 : D'après la loi forte des grands nombres, (argument déjà vu dans la démonstration du Théorème 3.36) il existe deux variables aléatoires réelles $\mathbb{P}$-presque sûrement strictement positives C_1, C_2 telles que :

$$\widetilde{\Omega_1} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{C_1 j \leq \Gamma_j \leq C_2 j\}, \text{ est } \mathbb{P}\text{-presque sûr.}$$

Comme $\frac{2}{\alpha} > 1$, alors pour tout ω dans $\widetilde{\Omega_1}$:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\Gamma_j(\omega)\right)^{-\frac{2}{\alpha}} \leq \left(C_1(\omega)\right)^{-\frac{2}{\alpha}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} j^{-\frac{2}{\alpha}}\right) < +\infty.$$

Pour tout $k \geq 1$, en prenant $\delta = 2^{-k}$, alors :

$$\begin{aligned}
\delta^{2\widehat{H}} \left[1 + |\log(|\delta|)|\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)(1+\varepsilon)} &= 2^{-2k\widehat{H}} \left[1 + k\log(2)\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)(1+\varepsilon)} \\
&\leq 2^{-2k\widehat{H}} \left[(1 + \log(2))k\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)(1+\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Dès lors, en posant $c_4 = c_3 \times \left[(1 + \log(2))k\right]^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)(1+\varepsilon)}$, et sachant que l'inégalité (5.31) est $\mathbb{P}$-presque sûre, et comme $\left\{\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \Gamma_j^{-\frac{2}{\alpha}}\right) < +\infty\right\}$ est aussi $\mathbb{P}$-presque sûr, alors l'évènement :

$$\widetilde{\Omega_2} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left\{ \mathbb{E}_\Gamma\left[\beth\left(2^{-j}\right)\right] \leq c_4 \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \Gamma_j^{-\frac{2}{\alpha}}\right) \times k^{\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)(1+\varepsilon)} \right\} < +\infty$$

est $\mathbb{P}$-presque sûr. Alors, pour tout ω dans $\widetilde{\Omega_1} \cap \widetilde{\Omega_2}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_\Gamma\left[\beth\left(2^{-k}\right)\right](\omega)}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} c_4 k^{-\frac{2}{\alpha}} [C_1(\omega)]^{-\frac{2}{\alpha}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} j^{-\frac{2}{\alpha}}\right) < +\infty.$$

Soit l'évènement $\mathbb{P}$-presque sûr :

$$\widetilde{\Omega_3} = \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_\Gamma\left[\beth\left(2^{-k}\right)\right]}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}} < +\infty \right\}.$$

Et soit alors l'évènement :

$$\widetilde{\Omega_4} = \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beth\left(2^{-k}\right)}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}} < +\infty \right\}.$$

Alors cet évènement est $\mathbb{P}$-presque sûr aussi. En effet, par convergence monotone (les égalités étant $\mathbb{P}$-presque sûres) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\Gamma\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beth\left(2^{-k}\right)}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}}\right] &= \mathbb{E}_\Gamma\left[\lim_{n\to+\infty}\uparrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\beth\left(2^{-k}\right)}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}}\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty}\uparrow \mathbb{E}_\Gamma\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\beth\left(2^{-k}\right)}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}}\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty}\uparrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}_\Gamma\left[\beth\left(2^{-k}\right)\right]}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_\Gamma\left[\beth\left(2^{-k}\right)\right]}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}} \end{aligned} \tag{5.45}$$

Ainsi, (5.45) implique :

$$\mathbb{P}(\widetilde{\Omega_4}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega_4}}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_\Gamma(\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega_4}})\right] = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega_3}}) = \mathbb{P}(\widetilde{\Omega_3}) = 1.$$

Et alors finalement,

$$\omega \in \widetilde{\Omega_4} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beth\left(2^{-k}\right)(\omega)}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}} < +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\beth\left(2^{-k}\right)(\omega)}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}} = 0.$$

De sorte que $\widetilde{\Omega_4} \subset \widetilde{\Omega_5}$, où :

$$\widetilde{\Omega_5} = \left\{ \lim_{k\to+\infty} \frac{\beth\left(2^{-k}\right)(\omega)}{2^{-2k\widehat{H}} k^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}} = 0 \right\}, \tag{5.46}$$

d'où la conclusion (5.32) de l'étape 2.

Étape 3 : Rappelons que pour tous s, t dans $[-T, T]$, tels que $|t-s| \leq \delta$:

$$\aleph(t,s) = \sum_{j=1}^{+\infty} \Gamma_j^{-\frac{2}{\alpha}} \left[\varphi_\varepsilon(Z_j)\right]^{-\frac{2}{\alpha}} |f(s,Z_j) - f(t,Z_j)|^2.$$

$Y(t) - Y(s)$ a pour loi conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{\Gamma,Z}$ la loi normale $\mathcal{N}(0, \mu_{\Gamma,Z})$, où :

$$\mu_{\Gamma,Z} = \left\{ \mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[\left(Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right) \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

D'après l'inégalité (5.22), $\mathbb{P}$-presque sûrement :

$$(\mu_{\Gamma,Z})^{\frac{1}{2}} \leq c_\alpha \left[\mathbb{E}(|g_1|^2)\right]^{\frac{1}{2}} (\aleph_{j,k})^{\frac{1}{2}} \tag{5.47}$$

où $\aleph_{j,k}$ désigne la variable aléatoire : $\aleph\left(\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right)$.

Soit l'évènement appartenant à $\mathcal{F}_{\Gamma,Z}$: $\mathcal{B}_{j,k} = \{\omega \in \Omega \mid \mu_{\Gamma,Z}(\omega) = 0\}$. On va montrer que :

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,k}) = \mathbb{P}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{B}_{j,k}}\right) = 0. \tag{5.48}$$

Ainsi on aura montré que $\mu_{\Gamma,Z} \neq 0$, $\mathbb{P}$-presque sûrement. Tout d'abord, pour tous s, t réels distincts, $\{\omega \in \Omega \mid (Y(t) - Y(s))(\omega) \neq 0\}$ est un évènement $\mathbb{P}$-presque sûr.
En effet, car $Y(t) - Y(s)$ suit une loi stable absolument continue, donc :

$$\{\omega \in \Omega \mid (Y(t) - Y(s))(\omega) \neq 0\} = (Y(t) - Y(s)^{-1}(\{0\}) \text{ est de probabilité nulle.}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,k}) &= \mathbb{P}\left[\mathcal{B}_{j,k} \cap \left\{ Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right) \neq 0 \right\}\right] \\ &= \mathbb{P}\left\{ \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{j,k}} \times \left[Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right) \right]^2 \neq 0 \right\}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Par ailleurs : $\mathbb{1}_{\mathcal{B}_{j,k}}$ étant $\mathcal{F}_{\Gamma,Z}$-mesurable.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{ \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{j,k}} \times \left[Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right) \right]^2 \right\} &= \mathbb{E}\left\{ \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{j,k}} \times \mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[\left(Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right) \right)^2 \right] \right\} \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{B}_{j,k}} \times 0\right] = 0. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Donc la variable positive $\mathbb{1}_{\mathcal{B}_{j,k}} \times \left[Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right) \right]^2$ est nulle $\mathbb{P}$-presque sûrement.
Alors, en utilisant la relation (5.49), nous obtenons : $\mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,k}) = 0$. Ce que nous voulions

montrer. L'inégalité (5.47) implique aussi que $\aleph_{j,k}$ est strictement positive $\mathbb{P}$-presque sûrement. Alors, l'inégalité (5.47) devient :

$$(\aleph_{j,k})^{-\frac{1}{2}}(\mu_{\Gamma,Z})^{\frac{1}{2}} \leq \beta, \tag{5.51}$$

où $\beta = c_\alpha \left[\mathbb{E}(|g_1|^2)\right]^{\frac{1}{2}}$. Enfin, $(\mu_{\Gamma,Z})^{-\frac{1}{2}} \left[Y\left(\frac{k+1}{2}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right)\right]$ a pour loi conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{\Gamma,Z}$ est $\mathcal{N}(0,1)$.
Considérons, pour tout j entier naturel et pour tout k appartenant à $[-2^jT, 2^jT]\cap\mathbb{Z}$:

$$\widetilde{\Omega_{6,j,k}} = \left\{\left|Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right)\right| > \beta^{-1}\sqrt{3\log(2)}\ j^{\frac{1}{2}}(\aleph_{j,k})^{\frac{1}{2}}\right\}$$

En utilisant le fait (5.48), le Lemme 5.12, avec $u = \sqrt{3\log(2)j}$, l'inégalité (5.51) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{\Omega_{6,j,k}}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega_{6,j,k}}}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{\Gamma,Z}(\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega_{6,j,k}}})\right] \\
&= \mathbb{P}\left\{\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[\left|Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right)\right|\right] > \beta^{-1}\sqrt{3\log(2)}j^{\frac{1}{2}}(\aleph_{j,k})^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{(\mu_{\Gamma,Z})^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[\left|Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right)\right|\right] > \beta^{-1}\sqrt{3\log(2)}j^{\frac{1}{2}}\ (\aleph_{j,k})^{\frac{1}{2}}(\mu_{\Gamma,Z})^{-\frac{1}{2}}\right\} \\
&\leq \mathbb{P}\left\{(\mu_{\Gamma,Z})^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}_{\Gamma,Z}\left[\left|Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right)\right|\right] > \sqrt{3\log(2)}j^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3\log(2)j}}\exp\left[-\frac{\left(\sqrt{3\log(2)j}\right)^2}{2}\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{6\pi\log(2)}\sqrt{j}}\exp\left[-\frac{3j\log(2)}{2}\right].
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Soit à présent l'évènement :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega_{6,j}} &= \bigcup_{k\in[-2^jT,2^jT]\cap\mathbb{Z}} \widetilde{\Omega_{6,j,k}} \\
&= \left\{\max_{k\in[-2^jT,2^jT]\cap\mathbb{Z}}\left|Y\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}\right)\right| > \sqrt{3\log(2)}\ j^{\frac{1}{2}}\left[\aleph_{j,k}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (5.52), pour tout k dans $[-2^jT, 2^jT] \cap \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\widetilde{\Omega_{6,j}}\right) &\leq \sum_{k \in [-2^jT, 2^jT] \cap \mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(\widetilde{\Omega_{6,j,k}}\right) \\
&\leq \sum_{k \in [-2^jT, 2^jT] \cap \mathbb{Z}} \frac{2 \exp\left[-\frac{3j\log(2)}{2}\right]}{\sqrt{6\pi\log(2)}\sqrt{j}} \\
&\leq \left(2^{j+1}T + 1\right) \times \frac{2 \exp\left[-\frac{3j\log(2)}{2}\right]}{\sqrt{6\pi\log(2)}\sqrt{j}} = \frac{2^{j+2-\frac{3}{2}j}T + 2^{1-\frac{3}{2}j}}{\sqrt{6\pi\log(2)}\sqrt{j}} \leq \frac{4T+2}{\sqrt{6\pi\log(2)}} 2^{-\frac{j}{2}} j^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{5.53}$$

qui est le terme d'une série convergente. Le lemme de Borel-Cantelli nous dit alors que l'évènement : $\liminf\limits_{n \to +\infty} \widetilde{\Omega_{6,j}}$ est $\mathbb{P}$-presque impossible. Alors l'évènement :

$$\widetilde{\Omega_6} = \Omega \setminus \left[\liminf_{n \to +\infty} \widetilde{\Omega_{6,j}}\right] = \limsup_{n \to +\infty} \Omega \setminus \widetilde{\Omega_{6,j}} \tag{5.54}$$

est $\mathbb{P}$-presque sûr. Soit alors :

$$\widetilde{\Omega_7} = \widetilde{\Omega_5} \cap \widetilde{\Omega_6},$$

où $\widetilde{\Omega_5}$ désigne l'évènement de l'étape 2, (5.46). Nous allons prouver que $\widetilde{\Omega_T}$ défini par la relation (5.33) contient $\widetilde{\Omega_7}$, et donc $\widetilde{\Omega_T}$ sera $\mathbb{P}$-presque sûr (but de l'étape 3). Soit $\omega \in \widetilde{\Omega_7}$, alors d'après la définition de $\widetilde{\Omega_6}$, il existe $J_1(\omega) \geq 1$ tel que pour tout $j \geq J_1(\omega)$ et pour tout k appartenant à $[-2^jT, 2^jT] \cap \mathbb{Z}$:

$$\left| Y\left(\frac{k+1}{2^j}, \omega\right) - Y\left(\frac{k}{2^j}, \omega\right) \right| \leq \sqrt{3\log(2)}\ j^{\frac{1}{2}} \left(\aleph_{j,k}(\omega)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.55}$$

D'après la définition (5.46) de $\widetilde{\Omega_5}$:

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{\beth\left(2^{-j}\right)(\omega)}{2^{-2j\widehat{H}} j^{\frac{2}{\alpha}(1+\varepsilon)}} = 0. \tag{5.56}$$

Or, d'après l'inégalité (5.28) :

$$\left(\aleph_{j,k}(\omega)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{c_0}\ \left[\beth\left(2^{-j}\right)(\omega)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.57}$$

Alors, il existe $J_2(\omega) \geq 1$ tel que pour tout $j \geq J_2(\omega)$:

$$\left[\beth\left(2^{-j}\right)(\omega)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3c_0\log(2)}} \times 2^{-j\widehat{H}} j^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}}. \tag{5.58}$$

Donc, en désignant par $J(\omega)$ le maximum de $J_1(\omega)$, et $J_2(\omega)$, pour tout $j \geq J(\omega)$, les relations (5.55) et (5.58) donnent :

$$\begin{aligned}\left|Y\left(\frac{k+1}{2^j},\omega\right)-Y\left(\frac{k}{2^j},\omega\right)\right| &\leq \sqrt{3\log(2)}\; j^{\frac{1}{2}}\left[\beth\left(2^{-j}\right)(\omega)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \sqrt{3\; c_0\log(2)}\; j^{\frac{1}{2}}\left[\aleph_{j,k}(\omega)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leq 2^{-j\widehat{H}}j^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{5.59}$$

Soit $n > J(\omega)$, nous allons démontrer par récurrence que pour tous m, n tels que $m > n$, pour tous s, t appartenant à $\mathcal{D}_{m,T}$, tels que $0 < |t-s| < 2^{-n}$:

$$|Y(t,\omega)-Y(s,\omega)| \leq 2\sum_{j=n+1}^{m} 2^{-j\widehat{H}}j^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}. \tag{5.60}$$

t et s ayant un rôle symétrique, on peut supposer $s < t$. Si $m = n+1$, on ne peut avoir que $s = \dfrac{k}{2^m}$, et $t = \dfrac{k+1}{2^m}$. $\left(t-s = \dfrac{1}{2^{n+1}} < \dfrac{1}{2^n}\right)$.
En effet, si : $s = \dfrac{k}{2^m}$, et $t = \dfrac{l}{2^m}$, pour $l > k+1$, alors : $t-s \geq \dfrac{k+2-k}{2^m} = \dfrac{2}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^n}$.

Alors, d'après la relation (5.59) :

$$|Y(t,\omega)-Y(s,\omega)| \leq 2^{-(n+1)\widehat{H}}(n+1)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}.$$

Supposons que la relation (5.60) soit vraie pour un certain m strictement à n.
Soient alors s, t appartenant à $\mathcal{D}_{m+1,T}$, tels que $s < t$. Et soient :

$$\begin{cases} t_1 = \max\{u \in \mathcal{D}_{m,T} \mid u \leq t\}\\ s_1 = \min\{u \in \mathcal{D}_{m,T} \mid s \leq u\}\end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} s \leq s_1 \leq t_1 \leq t\\ s_1 - s \leq 2^{-(m+1)}\\ t - t_1 \leq 2^{-(m+1)}\end{cases}. \text{ Donc : } \begin{cases}|Y(s_1,\omega)-Y(s,\omega)| \leq 2^{-(m+1)\widehat{H}}(m+1)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}\\ |Y(t,\omega)-Y(t_1,\omega)| \leq 2^{-(m+1)\widehat{H}}(m+1)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}\end{cases}.$$

Par hypothèse de récurrence, comme s_1, t_2 appartiennent à $\mathcal{D}_{m,T}$, et grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|Y(t,\omega)-Y(s,\omega)| &\leq |Y(t,\omega)-Y(t_1,\omega)| + |Y(t_1,\omega)-Y(s_1,\omega)| + |Y(s_1,\omega)-Y(s,\omega)|\\ &\leq 2\times 2^{-(m+1)\widehat{H}}(m+1)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} + 2\sum_{j=n+1}^{m} 2^{-j\widehat{H}}j^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}.\\ &= 2\sum_{j=n+1}^{m+1} 2^{-j\widehat{H}}j^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.
Soient maintenant s et t appartenant à $\mathcal{D}_T$, tels que $s < t$, et tels que : $t - s < 2^{-J(\omega)}$.
Alors, il existe un unique entier n tel que :

$$2^{-(n+1)} \leq t - s < 2^{-n}. \tag{5.61}$$

Grâce à l'inégalité (5.60) :

$$\begin{aligned}
|Y't, \omega) - Y(s, \omega)| &\leq 2 \sum_{j=n+1}^{+\infty} 2^{-j\widehat{H}} j^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \\
&= 2 \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-(j+n+1)\widehat{H}} (j+n+1)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \\
&= 2^{1-(n+1)\widehat{H}} (n+1)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j\widehat{H}} \left(1 + \frac{j}{n+1}\right)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq 2^{1-(n+1)\widehat{H}} (n+1)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j\widehat{H}} (1+j)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \right) \\
&= c_5 \, 2^{-(n+1)\widehat{H}} (n+1)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{5.62}$$

où c_5 est la constante : $2 \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j\widehat{H}} (1+j)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \right) < +\infty$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
& 2^{-(n+1)} \leq t - s < 2^{-n} \\
\Longrightarrow & -(n+1)\log(2) \leq \log(t-s) < -n\log(2) \\
\Longrightarrow & \, n\log(2) < |\log(t-s)| \leq (n+1)\log(2) \\
\Longrightarrow & \, (n+1)\log(2) < n\log(2) + 1 < 1 + |\log(t-s)| \leq (n+1)\log(2) + 1 \\
\Longrightarrow & \, [(n+1)\log(2)]^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} [1 + |\log(t-s)|]^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Donc :

$$(n+1)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \leq \frac{[1 + |\log(t-s)|]^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}}{(\log(2))^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}}. \tag{5.64}$$

Grâce aux inégalités (5.61) (5.64), l'inégalité (5.60) devient :

$$|Y(t, \omega) - Y(s, \omega)| \leq c_5 (\log(2))^{-\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)} |t-s|^{\widehat{H}} [1 + |\log(t-s)|]^{\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}. \tag{5.65}$$

En posant $c_1 = c_5 (\log(2))^{-\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)}$, l'inégalité (5.65) signifie donc que ω apartient à

$\widehat{\Omega_T}$, où :

$$\widehat{\Omega_T} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{\substack{s,t\ \in\ \mathcal{D}_T \\ |s-t|\leq 2^{-j}}} \left\{ |Y(t)-Y(s)| \leq c_1|t-s|^{\widehat{H}} \left[1+|\log(|t-s|)|\right]^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \right\}.$$

Mais pour chaque indice t, s dans cette réunion d'intersection dénombrable, $Y(t)-Y(s)$ possède la même loi que $X(t)-X(s)$. Donc, ω appartient bien à $\widetilde{\Omega_T}$.

Ce qui clôt l'étape 3.

Étape 4 : Nous construisons une modification $\left(\widetilde{X_T}(t)\right)_{t\in[-T,T]}$ de $(X(t))_{t\in[-T,T]}$ qui satisfait :

i) Si ω n'appartient pas à $\widetilde{\Omega_T}$, $\widetilde{X_T}(t)=0$ pour tout t dans $[-T,T]$.

ii) Si ω appartient à $\widetilde{\Omega_T}$, et si t appartient à $\mathcal{D}_T$, alors posons $\widetilde{X_T}(t,\omega)=X_T(t,\omega)$

iii) Si ω appartient à $\widetilde{\Omega_T}$, et si t appartient à $[-T,T]\setminus\mathcal{D}_T$, alors nous définissions $\widetilde{X_T}(t,\omega)$ comme étant la limite de la suite de réels $(X_T(t_n,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ où $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}_T$ et convergente vers t.

Apportons une précision au troisième cas, une telle suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suggérée dans ce cas (iii) par densité de $\mathcal{D}_T$ dans $[-T,T]$. Ensuite, ω appartenant à $\widetilde{\Omega_T}$, la suite $(X_T(t_n,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge bel et bien, car pour tous entiers naturels n et m

$$|X_T(t_n,\omega)-X_T(t_m,\omega)| \leq c_1|t_n-t_m|^{\widehat{H}} \left[1+|\log(|t_n-t_m|)|\right]^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}}, \tag{5.66}$$

le membre de droite tendant vers 0 quand n et m tendent vers $+\infty$, car $0<\widehat{H}<1$. La suite $(X_T(t_n,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est alors de Cauchy.

Enfin la limite $\widetilde{X_T}(t)$ de cette suite ne dépend pas de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. En effet soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}_T$ et convergente vers t. Alors nous avons, grâce à l'inégalité (5.66) appliquée à $(s_n)_n$:

$$\begin{aligned} |X_T(s_n,\omega)-\widetilde{X_T}(t,\omega)| &\leq |X_T(s_n,\omega)-\widetilde{X_T}(t_n,\omega)| + |\widetilde{X_T}(t_n,\omega)-\widetilde{X_T}(t,\omega)| \\ &\leq c_1|t_n-t_m|^{\widehat{H}} \left[1+|\log(|t_n-t_m|)|\right]^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \\ &\quad + |\widetilde{X_T}(t_n,\omega)-\widetilde{X_T}(t,\omega)|. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Le membre de droite converge vers 0 quand n et m tendent vers $+\infty$, car encore une fois le terme de type Cauchy tend vers 0, et parce que $X_T(t_n,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\widetilde{X_T}(t)$. Ainsi la suite $(X_T(s_n,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\widetilde{X_T}(t)$.

Montrons à présent que $\widetilde{X_T}$ vérifie l'inégalité (5.34).

ω appartenant à $\widetilde{\Omega_T}$, alors il existe $J(\omega)\geq 1$, tel que pour tous s',t' dans $\mathcal{D}_T$ tels que $|t'-s'|<2^{-J(\omega)}$:

$$|X_T(t')-X_T(s')| \leq c_1|t'-s'|^{\widehat{H}} \left[1+|\log(|t'-s'|)|\right]^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}+\frac{1}{2}} \tag{5.68}$$

Soient t, s appartenant à $[-T, T]$, et tels que $|t-s| < 2^{-J(\omega)}$. Alors il existe deux suites $(t_n)_n$ et $(s_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}_T$, convergentes respectivement vers t et s et telles que pour tout entier naturel n : $|t_n - s_n| < 2^{-J(\omega)}$.
Alors, grâce à l'inégalité (5.68), pour tout entier naturel n :

$$|X_T(t_n) - X_T(s_n)| \leq c_1 |t_n - s_n|^{\widehat{H}} \left[1 + |\log(|t_n - s_n|)|\right]^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha} + \frac{1}{2}} \tag{5.69}$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient la même inégalité (5.68) cette fois pour tous t et s de $[-T, T]$ tels que $|t-s| < 2^{-J(\omega)}$. En particulier, nous avons bien que $\widetilde{X_T}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement continue sur $[-T, T]$.
Montrons que $(\widetilde{X_T}(t))_{t \in [-T,T]}$ est une modification de $(X_T(t))_{t \in [-T,T]}$. Par l'hypothèse (ii), et par le fait que $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$, nous avons que pour tout t dans $\mathcal{D}_T$: $\widetilde{X_T}(t) = X_T(t)$, $\mathbb{P}$-presque sûrement.
Si t appartient à $[-T, T]/\mathcal{D}_T$, choisissons une suite $(t_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}_T$ et convergente vers t. Par définition de $\widetilde{X_T}$ (cas (iii)), nous savons que $\mathbb{P}$-presque sûrement, $(X_T(t_n))_n$ converge vers $\widetilde{X_T}(t)$.
Ainsi pour montrer dans ce cas que $\mathbb{P}$-presque sûrement : $\widetilde{X_T}(t) = X_T(t)$, il suffit de prouver que $(X_T(t_n))_n$ converge en probabilité vers $X_T(t)$.
Par définition de l'intégrale par rapport à une mesure stable :

$$\begin{aligned} & X_T(t_n) = \int_{\mathbb{R}} f(t_n, x) \mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \int_{\mathbb{R}} f(t, x) \mathrm{d}\widetilde{M_\alpha}(x) = X_T(t) \\ & \Longleftrightarrow f(t_n, \cdot) \xrightarrow[n \to +\infty]{L^\alpha(\mathbb{R})} f(t, \cdot). \end{aligned}$$

Nous allons faire usage du théorème de la convergence dominée. Partons de l'inégalité (5.25), pour tout réel non nul x :

$$\begin{aligned} |f(t_n, x) - f(t, x)| \leq {} & 2|x|^{-\frac{1}{\alpha}} \min(|t_n - t||x|, 1) \max\left(|x|^{-\widetilde{H}}, |x|^{-\widehat{H}}\right) \\ & + 2c_H |x|^{-\frac{1}{\alpha}} \min(|t||x|, 1) |\log(|x|)| \max\left(|x|^{-\widetilde{H}}, |x|^{-\widehat{H}}\right) \eth(|t_n - t|). \end{aligned}$$

La quantité $|t_n - t|$ tendant vers 0 il existe un rang $N_x \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N_x$: $\min(|t_n - t||x|, 1) = |t_n - t||x|$. Et donc :

$$2|x|^{-\frac{1}{\alpha}} \min(|t_n - t||x|, 1) \max\left(|x|^{-\widetilde{H}}, |x|^{-\widehat{H}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Et,

$$\eth(|t_n - t|) = |t_n - t|^{\widehat{H}} \left(1 + |\log(|t_n - t|)|\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

car $0 < \widehat{H} < 1$. Donc $|f(t_n,\cdot) - f(t,\cdot)| \xrightarrow[n\to+\infty]{\lambda-pp} 0$.
D'autre part, pour tout réel x non nul, grâce à l'inégalité (5.20) :

$$\begin{aligned}|f(t_n,x)|^\alpha &= \frac{|e^{itx}-1|^\alpha}{|x|^{1+H(t)\alpha}}\\ &\leq 2^\alpha \frac{\min(|x|^\alpha,1)}{|x|^{1+\alpha H(t)}} \leq 2^\alpha \min(|x|^\alpha,1)\max\left(|x|^{-1-\alpha\widehat{H}}, |x|^{-1-\alpha\widetilde{H}}\right).\end{aligned}$$

Soit g la fonction définie pour tout x non nul par :

$$g(x) = 2^\alpha \min(|x|^\alpha,1)\max\left(|x|^{-1-\alpha\widehat{H}}, |x|^{-1-\alpha\widetilde{H}}\right).$$

(et $g(0)=0$) Alors cette fonction g est mesurable positive et appartient à $L^1(\mathbb{R})$. En effet :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}x &= 2^{\alpha+1}\left[\int_0^1 \max\left(x^{-1-\alpha\widehat{H}}, x^{-1-\alpha\widetilde{H}}\right)x^\alpha \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\max\left(x^{-1-\alpha\widehat{H}}, x^{-1-\alpha\widetilde{H}}\right)\mathrm{d}x\right]\\ &= 2^{\alpha+1}\left[\int_0^1 x^{-1+\alpha(1-\widetilde{H})}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{-1-\alpha\widehat{H}}\mathrm{d}x\right] < +\infty,\end{aligned}$$

car $1+\alpha\widehat{H} > 1$ et $-1 < \alpha(1-\widetilde{H}) - 1 < 0$. Par le théorème de convergence dominée :

$$f(t_n,\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{L^\alpha(\mathbb{R})} f(t,\cdot), \text{ donc : } X_T(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X_T(t).$$

Ce qui clôt l'étape 4.

Nous pouvons alors définir une modification $(\widetilde{X}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ de $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ telle que pour tout ω appartenant à l'évènement $\mathbb{P}$-presque sûr $\bigcap_{T\in\mathbb{N}} \widetilde{\Omega_T}$. Et l'inégalité (5.16) est vraie. Ce qui clôt la démonstration.

□

6 Conclusion

Nous avons pu voir que les séries de Le Page permettent d'obtenir des modifications de processus définis par des intégrales pour lesquelles les trajectoires sont höldériennes. Et que cette méthode a pu aboutir pour un processus réel harmonisable multifractionnaire $S\alpha S$, sous certaines conditions sur la fonction de Hurst associée.

Des développements en séries de Le Page existent pour des variables aléatoires stables quelconques (pas symétriques nécessairement). L'égalité est encore $\mathbb{P}$-presque sûre. Tout ceci

est développé dans le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2].
Enfin une question implicite à ce mémoire :

Est-ce que tout processus SαS, (pas nécessairement défini par une famille d'intégrales SαS), a un processus SαS défini pas des séries de Le Page et qui lui soit égal en loi de processus ?

Une erreur a priori dans l'article de Marcus-Pisier [5] était de croire que tout processus SαS $(X_t)_{t\in T}$ pouvait être égal en loi de processus à un processus défini par des intégrales par rapport à une mesure SαS M sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\mathrm{d}M(x)\right)_{t\in T}, \text{ où } (f(t,\cdot))_{t\in T} \subset L^\alpha(\mathbb{R}),$$

processus que les auteurs nommaient "strongly stables" pour lesquels, en vertu du Théorème 5.7 (qu'ils démontraient), il existe un processus défini en série de Le Page qui lui soit égal en loi de processus, l'erreur résidant dans le fait que l'espace mesuré pouvait toujours être $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$. L'article de Kôno-Maejima [6] signalait alors cette erreur.

Pour répondre à cette question, le théorème suivant (que nous admettrons et qui généralise le Théorème 4.31 de représentation sur $\mathbb{R}^d$ que nous avons démontré) nous dit que tout processus $S\alpha S$ est toujours égal en loi de processus à un processus défini comme une famille d'intégrales $S\alpha S$ par rapport à une mesure $S\alpha S$ sur un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m)$:

Théorème 6.1 (Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine (1966), Schreiber (1972)) *Soit T un ensemble non vide quelconque. Soit $(X(t))_{t\in T}$ un processus $S\alpha S$ pour un certain $0 < \alpha < 2$. Alors il existe un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, m)$, une mesure $S\alpha S$ sur $(E, \mathcal{E}, m)$ et une famille $(f(t,\cdot))_{t\in T} \subset L^\alpha(E)$ telle que :*

$$(X(t))_{t\in T} \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\int_E f(t,x)\mathrm{d}M(x)\right)_{t\in T}.$$

Néanmoins, l'espace E considéré dans ce théorème peut dans cette construction être compliqué à exploiter, car E n'est pas en général $\mathbb{R}$, $[0,1]$, ou $\mathbb{S}_d$.
Nous avons une réponse positive à cette question avec $E = \mathbb{R}$, ou $[0,1]$ pour une grande classe de processus $S\alpha S$, présentée dans le livre de Taqqu-Samorodnitsky [2].
D'abord le Théorème 4.31 de représentation sur $\mathbb{R}^d$ qui concernait une famille finie de lois $S\alpha S$, se généralise à une suite de lois SαS (il donne une représentation pour les lois fini-dimensionnelles), et l'espace E est $[0,1]$.
Ensuite lorsque le processus $(X(t))_{t\in T}$ vérifie une condition de séparabilité que nous définissons ci-dessous :

Définition 6.2 *Soit* $(X(t))_{t\in T}$ *un processus stochastique. Alors on dit qu'il vérifie la condition (S) s'il existe un sous-ensemble* T_0 *dénombrable de* T *telle que pour tout* t *dans* T*,* $X(t)$ *est la limite en probabilités quand* n *tend vers* $+\infty$*, de somme de la forme :*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} X(t_{n,j}),\ \textit{où : } \begin{cases} \{a_{n,j} \mid n,j \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}, \\ \{t_{n,j} \mid n,j \in \mathbb{N}^*\} \subset T_0 \end{cases}.$$

Et nous avons alors :

Théorème 6.3 *Soit* α *appartenant à* $]0,2[$*. Et soit* $(X(t))_{t\in T}$ *un processus* $S\alpha S$ *vérifiant la condition S, alors :*

$$(X(t))_{t\in T} \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\int_0^1 f(t,x)\mathrm{d}M(x)\right)_{t\in T},$$

où $(f(,t\cdot)_{t\in T} \subset L^\alpha([0,1])$*, et* M *est une mesure* $S\alpha S$ *sur l'espace* $([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]), \lambda_{[0,1]})$.

Je remercie chaleureusement M. Ayache pour ce mémoire fait ensemble.

Références

[1] I. Nourdin (Université de Lorraine Vandoeuvre-lès-Nancy), Selected Aspects of Fractional Brownian Motion, Bocconi University Press, Springer (2012)

[2] G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu (1994), *Stable non-Gaussian random processes : stochastic models with infinite variance.* Chapman & Hall, New York.

[3] W. Feller (1966), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol II.* Princeton University.

[4] B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov (1968), *Limit Distributions for Sum of Independent Random Variables* Addison-Wesley publishing company. Reading Massachussets, Menlo Park, California,, London, Don Mills, Ontario

[5] M. Marcus, G. Pisier (1984), *Characterisations of almost surely continuous p-stable random Fourier series and strongly stationary processes*, dans : Acta Math, 152 : pp 245-301.

[6] N. Kôno, M. Maejima (1990), *Self-similar stable processes with stationary increments*, dans : Stable Processes and Related Topics, Sel. Pap. Workshop, Ithca/NY (USA), et : Prog. Probab., vol 25, 1991, pp.275-295.

[7] N. Kôno, M. Maejima (1991), *Hölder continuity of sample paths of some self-similar stable processes*, Tokyo J. Math. 14 (1) 93-100.

[8] M. Dozzi, G. Shevchenko (2010), *Real harmonizable multifractional stable process and its local properties* dans : Stochastic Processes and their Applications 121, pp 1509-1523

[9] Thèse de G. Boutard, université de Lille 1, date de soutenance : novembre 2016.

[10] A. Ayache, Multifractional Stochastic Fields, World Scientific Publishing Co. Pte Ltd (2019)