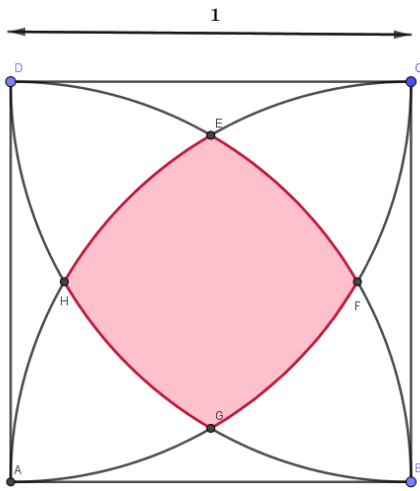
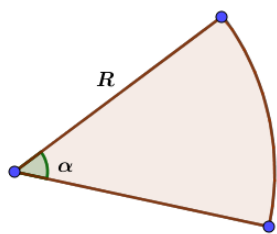




Trouver l'aire rosée.

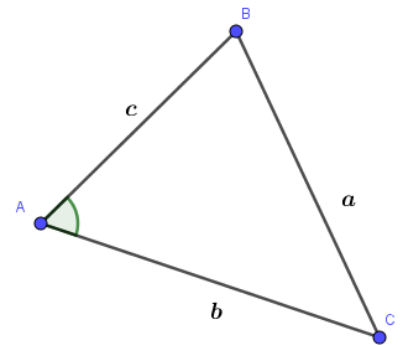
Indication : On utilisera la formule de l'aire d'un secteur angulaire de rayon R et d'angle valant α rad ($\alpha \geq 0$) :



$$\mathcal{A}_{\text{SecteurAngulaire}} = R^2 \times \frac{\alpha}{2}$$

On rappelle le théorème d'Al Kashi (ou de Pythagore généralisé) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}).$$



Correction :

Soient I, J, K , et L les milieux respectifs de $[DC]$, $[AB]$, $[AD]$, et $[CB]$. Nous avons :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DJ}. \text{ Donc : } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DJ}.$$

Le théorème du parallélogramme dit alors que $AIJD$ est un parallélogramme, et donc que ses cotés opposés sont parallèles et égaux. En particulier (IJ) est perpendiculaire à $[DC]$ et passe par son milieu I ; (IJ) est donc la médiatrice de $[DC]$.

De même, on prouverait par exemple que (KL) est la médiatrice de $[AD]$.

$AD = AE = AF = AB = 1$, car ce sont des rayons du quart de cercle de centre A de rayon AD .

De même $CD = CH = CG = CB = 1$ et enfin $DC = DF = DG = DA = 1$ et $BC = BE = BH = BA = 1$.

En sorte que $AE = EB = 1$ et $DG = GC = 1$

E est alors équidistant de A et B et G l'est de D et C . E et G appartiennent donc à la médiatrice de $[AB]$ et de $[CD]$ qui sont la même droite (IJ) . Ainsi I, E, G et J sont alignés.

On démontre de même que K, H, F et L sont alignés.

Le triangle AEB est équilatéral de coté 1, donc $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Donc $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}[2\pi] = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Et de même, DAF est équilatéral donc : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Ainsi : $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

D'après le théorème d'Al Kashi dans le triangle AEF :

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AF \times AE \cos((\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AE})) = 1 + 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Les triangles AEF, BEH, CHG et DFG sont isométriques (deux cotés égaux à 1 avec un angle de $\frac{\pi}{6}$ entre ces deux cotés).

Donc $EF = GF = GH = HE = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Le quadrilatère $EFGH$ est alors un losange.

D'autre part, nous avons aussi que les triangles DAE et AEF sont isométriques, en sorte que par le théorème d'Al Kashi, nous trouvons pareillement : $DE = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = EF$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle DIE rectangle en I :

$$IE = \sqrt{DE^2 - DI^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{2}.$$

De façon analogue, on montrerait que :

$$KH = LF = GJ = IE = \frac{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{2}.$$

Ce qui fait que $EG = IJ - 2 \times \frac{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{2} = 1 - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$, et de même : $HF = 1 - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

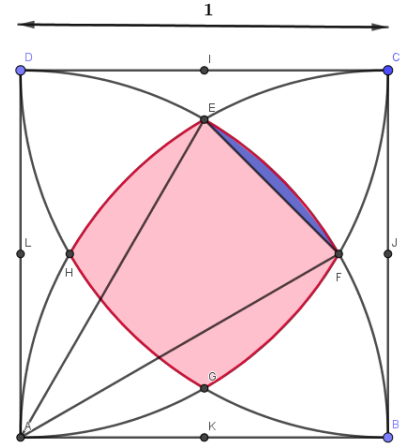
Le losange $EFGH$ a alors ses segments diagonaux de même longueur, c'est un carré.

L'aire du vitrail est donc égale à l'aire du carré $EFGH$ plus quatre fois l'aire du petit domaine hachuré, qui est lui-même égale à l'aire du secteur angulaire de centre A partant de F vers E donc de rayon 1 et faisant un angle de $\frac{\pi}{6}$, moins l'aire du triangle AFE .

$$\mathcal{A}_{EFGH} = EF^2 = 2 - \sqrt{3}. \quad \mathcal{A}_{\text{secteur angulaire}} = \frac{\pi}{6} \times 1^2 = \frac{\pi}{6}.$$

Pour le triangle AFE , il est isocèle en A soit H le pied de la hauteur issue de A , H est donc aussi le milieu de $[EF]$. Donc

$$EH = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$



Le théorème de Pythagore dans AHE rectangle en H donne :

$$AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Donc :

$$\mathcal{A}_{AEF} = \frac{EF \times AH}{2} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{4 - 3}}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathcal{A}_{\text{petit domaine}} = \mathcal{A}_{\text{secteur angulaire}} - \mathcal{A}_{AEF} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}.$$

Et finalement :

$$\mathcal{A}_{\text{vitrail}} = 2 - \sqrt{3} + 4 \times \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \right) = 2 - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 1 = 1 - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}.$$