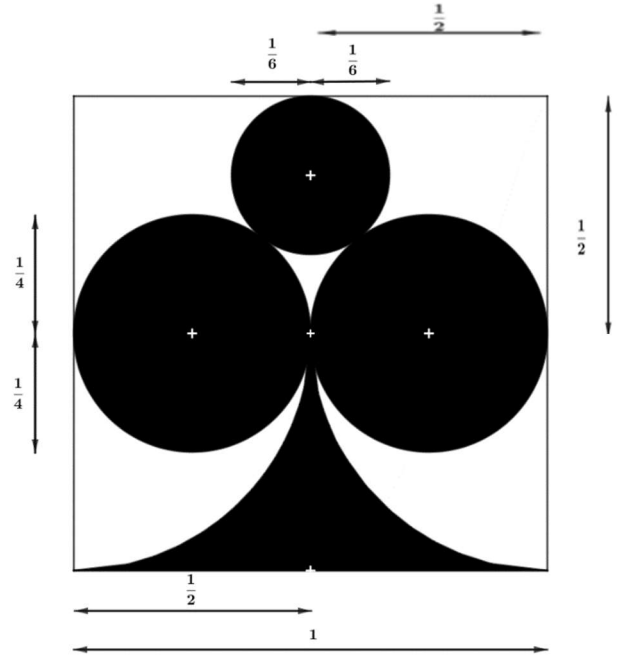
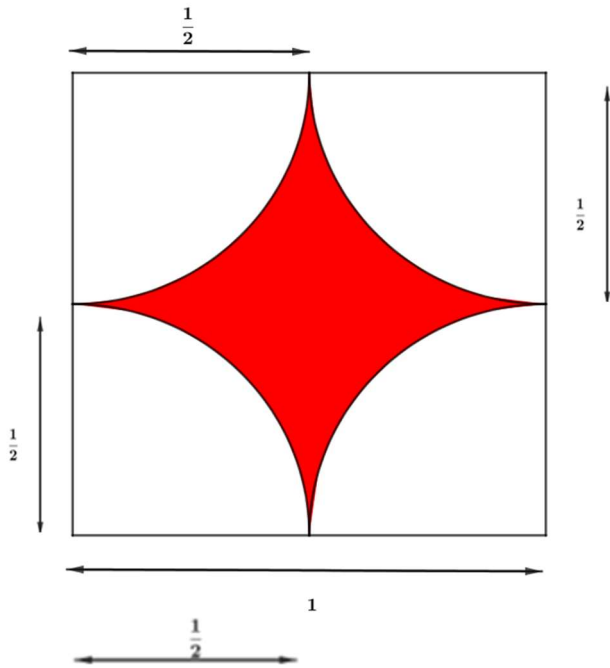
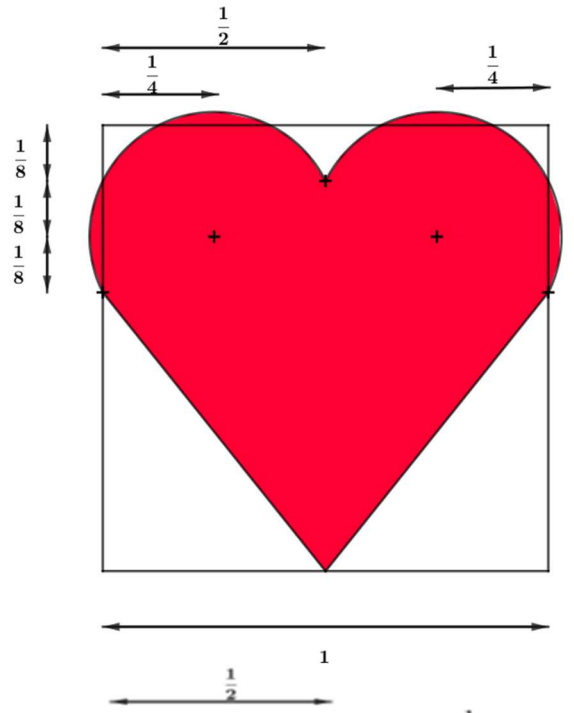
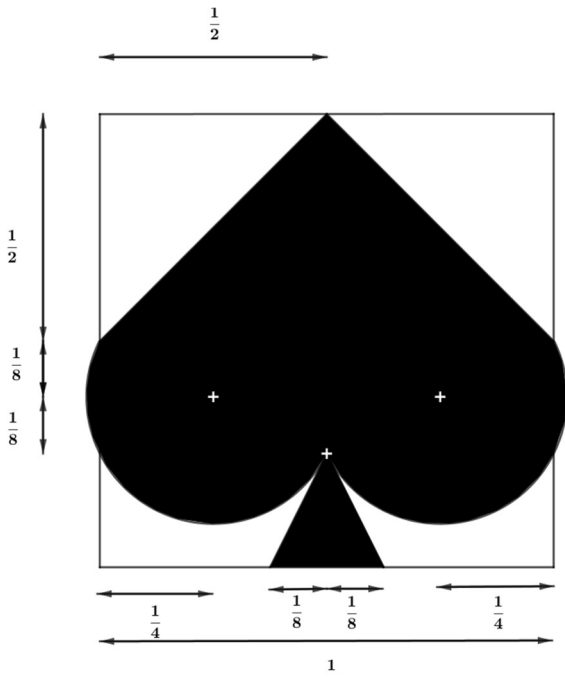
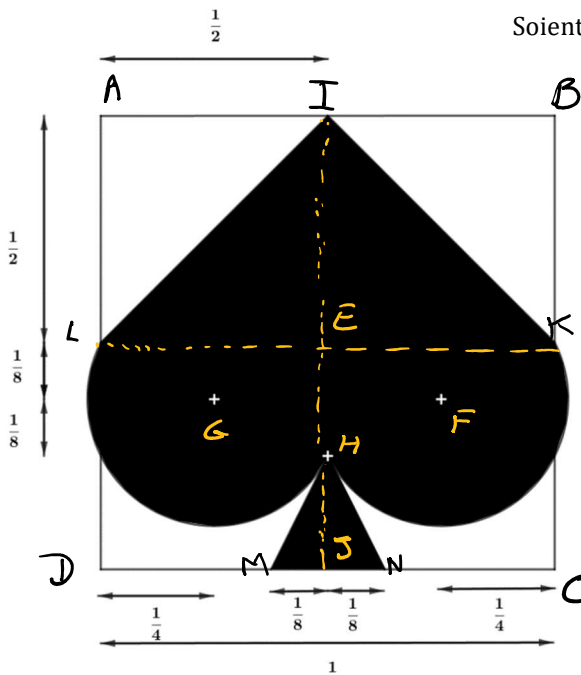


Le défi à la carte : Déterminer les valeurs exactes des aires des Pique Cœur Carreau Trèfle.



Correction : Pour le Pique :



Soient I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[DC]$, $[BC]$ et $[AD]$.

Alors d'après le théorème de Pythagore dans les triangles ADJ et IBC rectangles en D et B :

$$\begin{cases} AJ = \sqrt{AD^2 + DJ^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ IC = \sqrt{IB^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \end{cases} \text{ et } AI = JC = \frac{1}{2} \text{ Le}$$

quadrilatère $AICJ$ est un parallélogramme. Donc ses segments diagonaux $[IJ]$ et $[AC]$ se coupent en leur milieu, que l'on appelle E . De même on prouve que $[LK]$ et $[AC]$ se coupent en leur milieu E .

Dès lors, nous avons : $\frac{AE}{AC} = \frac{AL}{AD} = \frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès deux fois dans les triangles AEL et ACD et les triangles AIE et ABC , on a $(LE) \parallel (DC)$ et $(IE) \parallel (BC)$. Et donc finalement $(IJ) \parallel (AD) \parallel (BC)$ et $(LK) \parallel (AB) \parallel (DC)$. Et alors $(IJ) \perp (LK)$ (en E).

Le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles AIL et

$$IBK \text{ rectangles en } A \text{ et } B : \begin{cases} IL = \sqrt{AI^2 + AL^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ IK = \sqrt{IB^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Et nous avons $EH = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Le théorème de Pythagore dans les triangles AEH et HEK rectangles en E :

$$LH = KH = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Les aires des demi-cercles de diamètres respectifs $[LH]$ et $[HK]$ sont égales à :

$$\pi \times \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2}{2} = \frac{5\pi}{128}.$$

Les aires des triangles isométriques IEL et IEK valent :

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}.$$

Enfin H est équidistant de K et L donc appartient à la médiatrice de $[LK]$. Or cette médiatrice est IJ . Donc H appartient à $[IJ]$, et alors :

$$HJ = IJ - IH = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

L'aire du triangle vaut :

$$\frac{HJ \times MN}{2} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{32}.$$

Les aires des triangles isométriques LEH et KEH rectangles en E valent :

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{16}.$$

Finalement :

$$\mathcal{A}_{\text{Pique}} = 2 \times \frac{5\pi}{128} + 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{5\pi}{64} + \frac{8}{32} + \frac{4}{32} + \frac{1}{32} = \frac{5\pi}{64} + \frac{13}{32} = \frac{5\pi + 26}{64}.$$

Pour le Cœur : soient cette fois E, F, G et H et I les points donnés de la figure. Et soit J le projeté orthogonal de H sur (AD) , et K celui de H sur (BC) . Et soient L le projeté orthogonal de H sur (AB) .

Alors d'après la figure $AL = \frac{1}{2}$ et $JH = \frac{1}{8} = HK$.

Soit enfin M le milieu de $[DC]$. À nouveau, par la même argumentation que pour le Pique, (LM) est la médiatrice de $[AB]$ et $[DC]$, et $LM = AD = AB = 1$.

De plus une application du théorème de Pythagore dans ALH et HLB rectangle en B montre que :

$$AH = \sqrt{LH^2 + AL^2} = \sqrt{LH^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{LH^2 + LB^2} = HB.$$

(Autre argument, les triangles ALH et HLB sont isométriques car

$$\begin{cases} LH = LH = 0.125 \\ AL = LB = 0.5, \text{ donc } AH = HB \\ \angle HLA = \angle HLB = 90^\circ \end{cases}$$

H est alors équidistant de A et B , donc appartient à la médiatrice de $[AB]$, qui est (LM) , ainsi les points L, H et M sont alignés.

De même les triangles HJG et HKI rectangles respectivement en J et K sont isométriques, le théorème de Pythagore dans l'un d'eux nous donne :

$$GH = HI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

qui est un diamètre des demi-cercles de diamètre $[GH]$ et $[HI]$, qui ont pour aire tous les deux :

$$\mathcal{A}_{\text{demi-disque}} = \frac{\pi \times \left(\frac{\sqrt{5}}{4 \times 2}\right)^2}{2} = \frac{5\pi}{128}.$$

D'autre part, les triangles GMD et IMC rectangles respectivement en D et C étant isométriques, nous avons que $GM = MI$. Et aussi : les triangles GAL et ILB rectangles respectivement en A et B étant isométriques, nous avons que $GL = LI$. Les points L et M sont équidistants des points G et I . Alors (LM) est aussi la médiatrice du segment $[GI]$, donc (LM) est perpendiculaire à $[GI]$, et par conséquent $(GI) \perp (AB)$.

Le quadrilatère $ABIG$ a alors trois angles droits, c'est un rectangle, et alors finalement les cotés opposés AB et GI sont égaux.

Le point d'intersection N de $[GI]$ et (LM) , par définition de la médiatrice est le milieu de $[GI]$. Et donc $GN = NI = \frac{1}{2}$. Et (LM) et (GI) sont perpendiculaires en N . Le quadrilatère $GNMD$ a trois angles droits, c'est un rectangle donc :

$$NM = GD = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

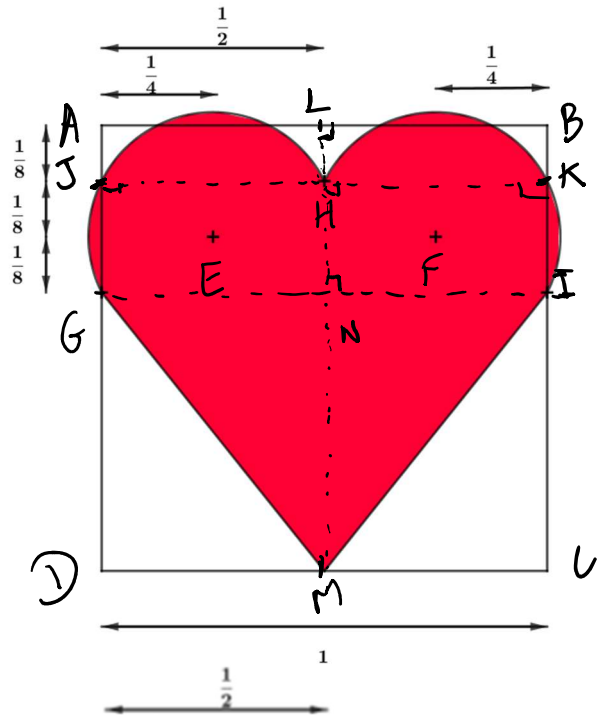
De même le quadrilatère $GJHN$ a trois angles droits, c'est un rectangle et donc $HN = GJ = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Finalement :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{GIM} = \frac{GI \times MN}{2} = \frac{1 \times \frac{5}{8}}{2} = \frac{5}{16} \\ \mathcal{A}_{GIH} = \frac{GI \times HN}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Et :

$$\mathcal{A}_{\text{Cœur}} = 2 \times \frac{5\pi}{128} + \frac{5}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5\pi}{64} + \frac{7}{16} = \frac{5\pi + 28}{64}.$$



Pour le Carreau :

Lors du Pique, nous avons prouvé que $IJ=KL=1$ et que $(IJ) \perp (KL)$.
Le point d'intersection était noté E.

Dès lors, les 4 quadrilatères AIEK, BIEL, KEJD et LEJC ont chacun trois angles droits et deux cotés consécutifs égaux, ce sont des carrés de côté $\frac{1}{2}$. Ils ont tous pour aire : $\mathcal{A}_{\text{carré}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Considérant un quart de cercle de rayon $\frac{1}{2}$, un tel quart de cercle a pour aire :

$$\mathcal{A}_{\text{quart de cercle}} = \frac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

Ainsi :

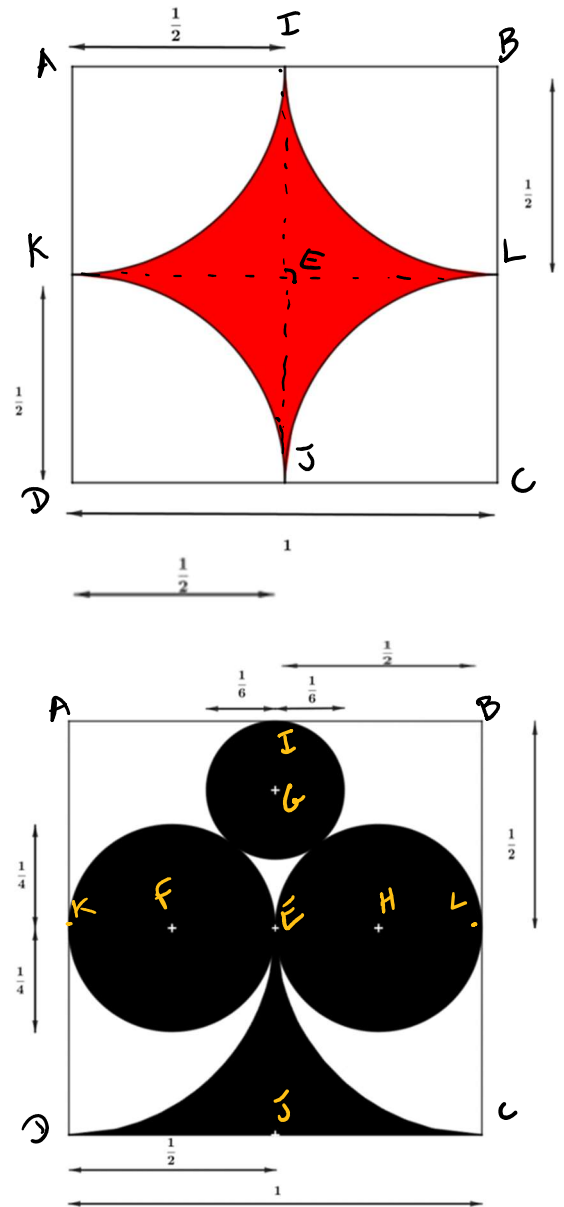
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{carreau}} &= 4\left(\mathcal{A}_{\text{carré}} - \mathcal{A}_{\text{quart de cercle}}\right) = 4 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}\right) \\ &= 4 \times \frac{4 - \pi}{16} = \frac{4 - \pi}{4}.\end{aligned}$$

Pour le trèfle, on procède comme ci-dessus, l'aire de la tige du trèfle vaut :

$$\mathcal{A}_{\text{tige}} = 2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}\right) = 2 \times \frac{4 - \pi}{16} = \frac{4 - \pi}{8}.$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{trèfle}} &= \pi\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2 \times \pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{4 - \pi}{8} \\ &= \frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{8} + \frac{4 - \pi}{8} = \frac{\pi}{36} + \frac{4}{8} \\ &= \frac{\pi}{36} + \frac{1}{2} = \frac{\pi + 18}{36}.\end{aligned}$$



Remarque : Revenons sur la preuve du fait que $(IJ) \parallel (AD)$ et que $IJ = 1$ en observant par exemple les figures des Piques, Carreau ou Trèfle.

- Un autre argument se trouve avec les vecteurs :

Nous avons $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DJ}$. Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DJ}$.

Le théorème du parallélogramme dit alors que $A I J D$ est un parallélogramme, et donc que ses cotés opposés sont parallèles et égaux. D'où le résultat qui devient plus immédiat.

Mais pour l'élève de seconde n'ayant pas vu encore le chapitre des vecteurs...Il fallait procéder comme nous avons fait avec le Pique.

- Voici une troisième démonstration sans vecteur, que nous avons croisée lors du Coeur, les triangles AID et IBC respectivement rectangles en A et en B sont isométriques, donc $ID = IC$ (Le théorème de Pythagore le prouverait aussi). Et J est le milieu de $[CD]$, donc $CJ = JD$. En sorte que les points I et J sont équidistants de D et C , (IJ) est donc la médiatrice de $[DC]$.
Le quadrilatère $A I J D$ a alors trois angles droits, c'est un rectangle, donc les cotés opposés sont parallèles et de même longueur, on obtient aisément : $(IJ) \parallel (AD)$ et $IJ = AD = 1$.