MPS : travail sur les figures de l'espace :

I) L'hexagone régulier :

1°) Construire un hexagone régulier de coté 3 cm.

2°) Calculer son aire.

3°) Soit maintenant un hexagone régulier de coté a. Déterminer sa surface en fonction de a.

II) Prisme et Pyramide hexagonales :

1°) Soit un prisme dont la base est un hexagone régulier de coté a et de hauteur h. Faire une figure d'un telle solide. Donner son volume en fonction de a et h.

2°) Appelons O et O' les centres des bases de ce prisme. Soit S un point sur (OO'). Démontrer que S est équidistant de chaque sommet d'une base du prisme.

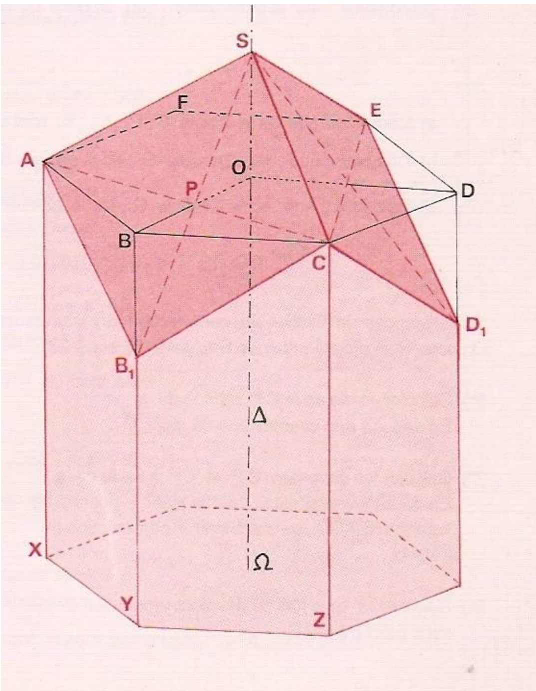
3°) On prend maintenant S sur (OO') et à l'extérieur du prisme, le point S et les points de la base du prisme la plus proche de S forme une pyramide hexagonale de sommet S et de hauteur h'. Donner en fonction de a et h' le volume de cette pyramide. Donner enfin le volume du solide complet en fonction de a, h et h'. Faire l'application numérique avec $a = 3, h = 6, h' = 2$: résultat en litre arrondi à 0,01 prés.

III) Patron du solide :

1°) Calculer en fonction de h' et a la longueur d'une arête de la pyramide hexagonale.

2°) Construire à la règle et le compas le patron du solide avec $a = 3cm, h' = 2\ cm, h = 6cm$.

L'alvéole des abeilles :



Considérons le prisme droit de hauteur h, dont la base est un hexagone régulier de côté a. Soit (Δ) l'axe de ce prisme. Un plan (P) contenant la droite (AC) coupe l'axe (Δ) en S et coupe en B_1 l'arête $[BY]$ du prisme.

1°) Démontrer que le quadrilatère AB_1CS est un losange.

2°) On complète le fond de l'alvéole en construisant les losanges SCD_1E et SEF_1A.

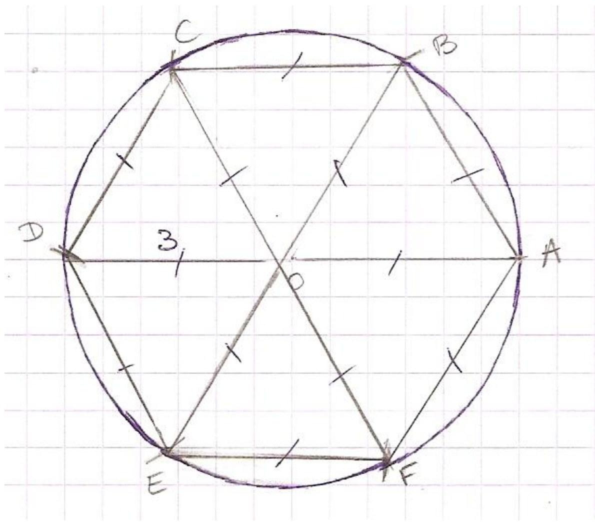
Déterminer en fonction de a, h et $h' = SO$, le volume de l'alvéole en litres.

3°) Construire le patron de cet alvéole, avec $a = 3, h = 6$ et $h' = 2$.

Correction :

I) L'hexagone régulier :

1°) 2°) 3°) Notons A_{ABO} l'aire du triangle équilatéral ABO, et A_{ABCDEF} l'aire de l'hexagone $ABCDEF$. Les triangles ABO, BOC, DOE, EOF et FOA sont superposables donc ont la même surface.



Dès lors : $A_{ABCDEF} = 6A_{ABO}$. Il reste à trouver l'aire d'ABO. Soit I le milieu de $[AB]$, la hauteur OI mesure : $\frac{a\sqrt{3}}{2}cm$. Donc,

$$A_{ABO} = \frac{a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}cm^2.$$

Donc, $A_{ABCDEF} = 6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}cm^2$.

Pour $a = 3cm$: $A_{ABCDEF} = \frac{27\sqrt{3}}{2}cm^2$.

II) Prisme et pyramide hexagonales :

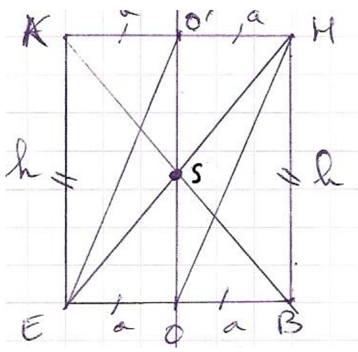
1°)

$$V_{ABCDEF} = A_{ABCDEF} \times h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}h = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2}cm^3.$$

2°) Le raisonnement est le même quelle que soit la position de S sur (OO'), qu'il soit à l'extérieur ou à l'intérieur de $[OO']$. On fixe S au-dessus d'O'.

On doit montrer que :

$$\begin{cases} SA = SB = SC = SD = SE = SF \\ SG = SH = SI = SJ = SK = SL \end{cases}.$$



Démontrons que $SO'K$ est rectangle en O'.

Considérons le rectangle $KEBH$, O' est le milieu de $[KH]$ et O est celui de $[EB]$. Et $O'K = O'H = a = OE = OB$.

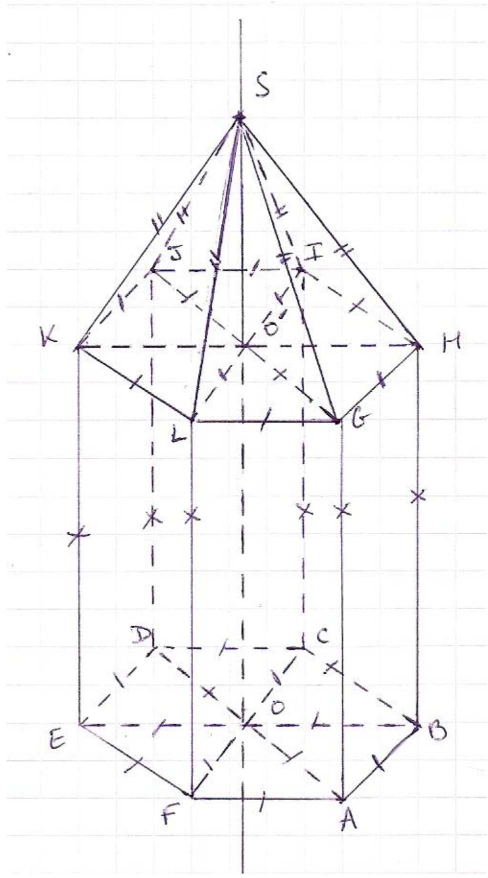
Le triangle EAO' est rectangle en K et donc le théorème de Pythagore donne :

$$O'E^2 = KO'^2 + KE^2 = a^2 + h^2$$
$$O'E = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Le triangle HBO est rectangle en B et donc le théorème de Pythagore donne :

$$OH^2 = OB^2 + BH^2 = a^2 + h^2$$
$$OH = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Donc, $OH = O'E$. Dès lors, le quadrilatère non croisé $O'EOH$ ayant ses côtés opposés de même longueur, il s'agit d'un parallélogramme.



Dès lors, ses diagonales se coupent en leur milieu M, donc M est le milieu de $[KB]$ et celui de $[OO']$.

Alors, la droite (MO') est une droite des milieux du triangle EHB, et donc (MO), *qui est confondue* à (OO'), est parallèle à (HB). Mais, (HB) est perpendiculaire à $[KH]$, donc (OO') est aussi perpendiculaire à (HB). Donc, $SO'K$ est bien rectangle.

Le raisonnement serait le même pour démontrer que $SO'L$, $SO'I, SO'J, SO'G$, et $SO'H$ sont rectangles en O'. Le théorème de Pythagore donne dans ces triangles :

$$\begin{cases} SK^2 = SO'^2 + O'K^2 = SO'^2 + a^2 \Rightarrow SK = \sqrt{SO'^2 + a^2} \\ SL^2 = SO'^2 + O'L^2 = SO'^2 + a^2 \Rightarrow SL = \sqrt{SO'^2 + a^2} \\ SI^2 = SO'^2 + O'I^2 = SO'^2 + a^2 \Rightarrow SI = \sqrt{SO'^2 + a^2} \\ SJ^2 = SO'^2 + O'J^2 = SO'^2 + a^2 \Rightarrow SJ = \sqrt{SO'^2 + a^2} \\ SG^2 = SO'^2 + O'G^2 = SO'^2 + a^2 \Rightarrow SG = \sqrt{SO'^2 + a^2} \\ SH^2 = SO'^2 + O'H^2 = SO'^2 + a^2 \Rightarrow SH = \sqrt{SO'^2 + a^2} \end{cases}$$

D'où

$$SG = SH = SI = SJ = SK = SL.$$

On démontrerait de façon analogue : $SA = SB = SC = SD = SE = SF$.

3°)

$$\begin{aligned} V_{ABCDEFGHIJKLS} &= V_{GHIJKLS} + V_{ABCDEFGHIJKL} \\ &= \frac{1}{3} A_{GHIJKL} \times h' + \frac{a^2 h\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} h' + \frac{3a^2 h\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{a^2 h'\sqrt{3}}{2} + \frac{3a^2 h\sqrt{3}}{2} = (h + 3h')\frac{a^2\sqrt{3}}{2} cm^3. \end{aligned}$$

Pour $a = 3, h = 6, h' = 2$:

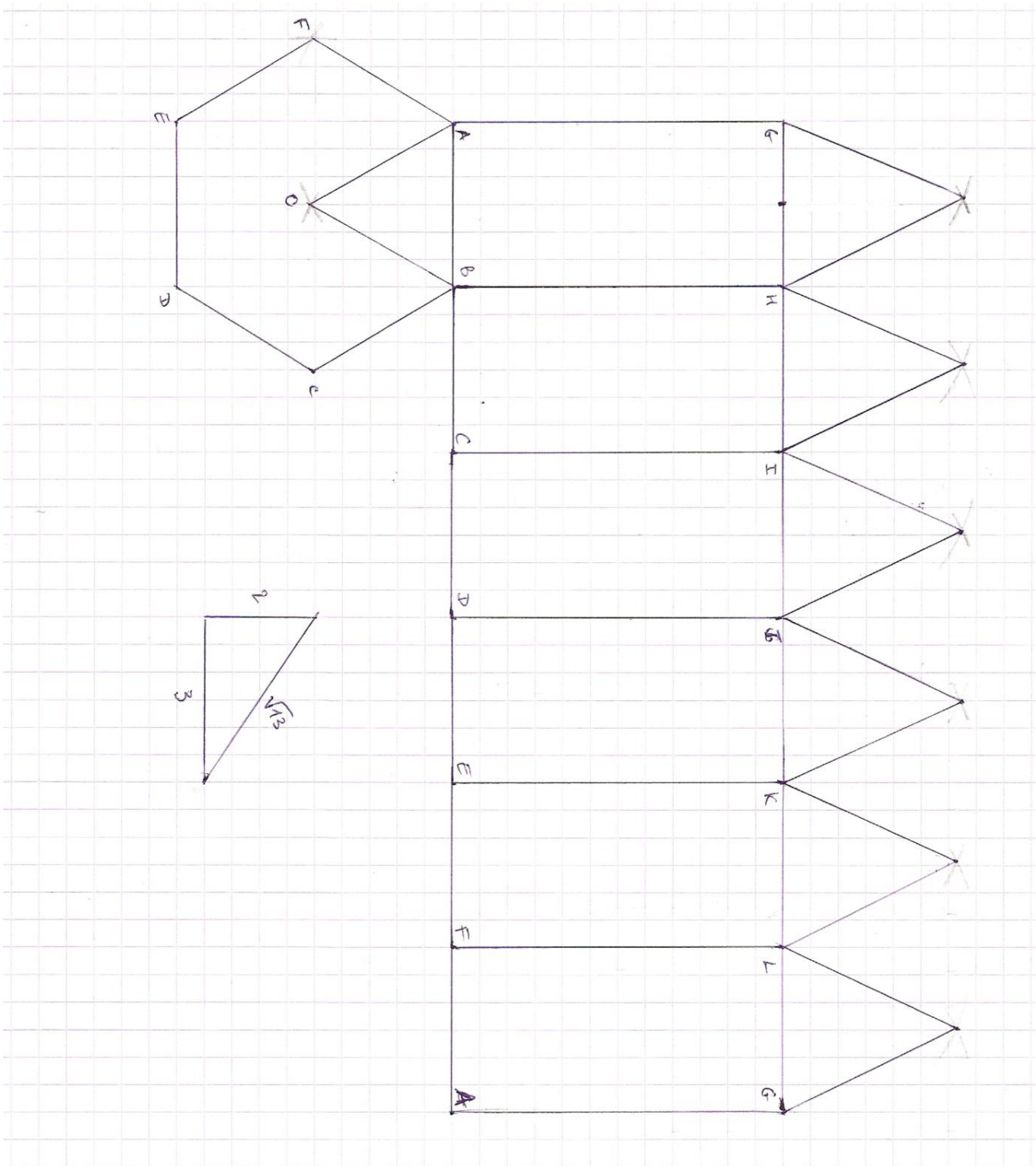
$$V_{ABCDEFGHIJKLS} = (6 + 6)\frac{9\sqrt{3}}{2} cm^3 = 54\sqrt{3} \times 10^{-3} l \approx 0{,}09 l.$$

III)

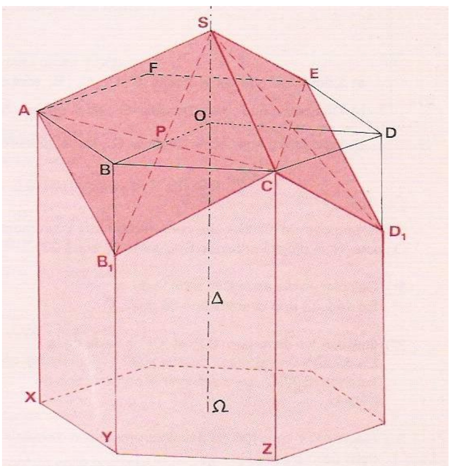
1°) Le calcul est déjà fait, c'est celui de SK.

$SK = \sqrt{a^2 + h'^2}$.

$a = 3\ cm, h' = 2\ cm, h = 6 cm$, alors :$SK = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.



<u>L'alvéole :</u>



1°) $AOCB$ est un losange, car $ABCDEF$ est un hexagone régulier et donc AOB et BOC sont équilatéraux de côté a, et donc : $AO = OC = BC = AB = a$.

Ainsi, ses segments diagonaux se coupent en leur milieu. P désigne donc le milieu de $[AC]$ et celui de $[OB]$.

Les quatre points S, A, B_1 et C sont coplanaires (dans le plan (P)). Pour démontrer que SAB_1C est un losange, il suffit de démontrer que P est le milieu de $[SB_1]$ et que les droites (SB_1) et (AC) sont perpendiculaires.

Le point S appartient à l'axe du solide, et l'on a vu que ce point était équidistant d' A et B, donc SBA est isocèle en S, dès lors la médiane issue de S , qui est (SP), est aussi la hauteur issue de S. (SP) est par conséquent perpendiculaire à $[AC]$.

Considérons B_1AC, ce triangle est isocèle en B_1, en effet, le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles en B, B_1AB, et B_1CB donne :

$$\begin{cases} B_1A^2 = AB^2 + BB_1^2 = a^2 + BB_1^2 \Rightarrow B_1A = \sqrt{a^2 + BB_1^2} \\ B_1C^2 = AC^2 + BB_1^2 = a^2 + BB_1^2 \Rightarrow B_1C = \sqrt{a^2 + BB_1^2} \end{cases} \Rightarrow B_1A = B_1C.$$

Dès lors, dans ce triangle B_1AC, la médiane issue de B_1, qui est (B_1P), est aussi la hauteur issue de B_1, donc (B_1P)est perpendiculaire à (AC).

Ainsi, dans le plan (P), les droites (B_1P)et (SP) sont confondues, ce qui prouve le fait que S, P et B_1 sont alignés.

L'arête (B_1B) est parallèle à l'axe du solide (il est aisé de le montrer s'ils ont l'orthogonalité spatiale) : (B_1B)et (Δ) sont orthogonales au plan (ABC), donc sont parallèles)

Donc (B_1B) est parallèle à (OS), et donc O, S, B et B_1 sont coplanaires, ensuite S, P et B_1 sont alignés, O, P et B sont alignés. Dès lors dans les triangles B_1PB et SOP, le théorème de Thalès donne :

$$\frac{PB}{PO} = \frac{B_1P}{SP} = \frac{BB_1}{SO}.$$

Mais, comme P est le milieu de $[OB]$, donc : $PB = PO$ et donc : $\frac{PB}{PO} = 1$. D'où :

$$\frac{B_1P}{SP} = 1 \Rightarrow B_1P = SP.$$

P est donc le milieu de $[SB_1]$.

Remarque : on obtient aussi

$$\frac{BB_1}{SO} = 1 \Rightarrow BB_1 = SO.$$

(cette égalité de longueurs qu'on ne pouvait exploiter sans l'avoir démontrée…)

2°) Considérons les tétraèdres B_1ABC, D_1DEC, F_1FAE, ils sont identiques par construction. Leurs volumes sont donc égaux. Calculons donc le volume du premier.

$V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} BB_1 \times A_{ABC}$.

$A_{ABC} = \frac{AC \times BP}{2}$.

Or, $AC = 2 \times AP$, mais $AP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (hauteur du triangle équilatéral AOB de coté a)

Donc $AC = a\sqrt{3}$ et $BP = \frac{OP}{2} = \frac{a}{2}$.

$A_{ABC} = \frac{a\sqrt{3} \times \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ et donc $V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} h' \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 h' \sqrt{3}}{12}$.

Considérons maintenant, les tétraèdres $SABC, SCDE$, et $SEFA$, superposables par construction, donc ils ont même volume.

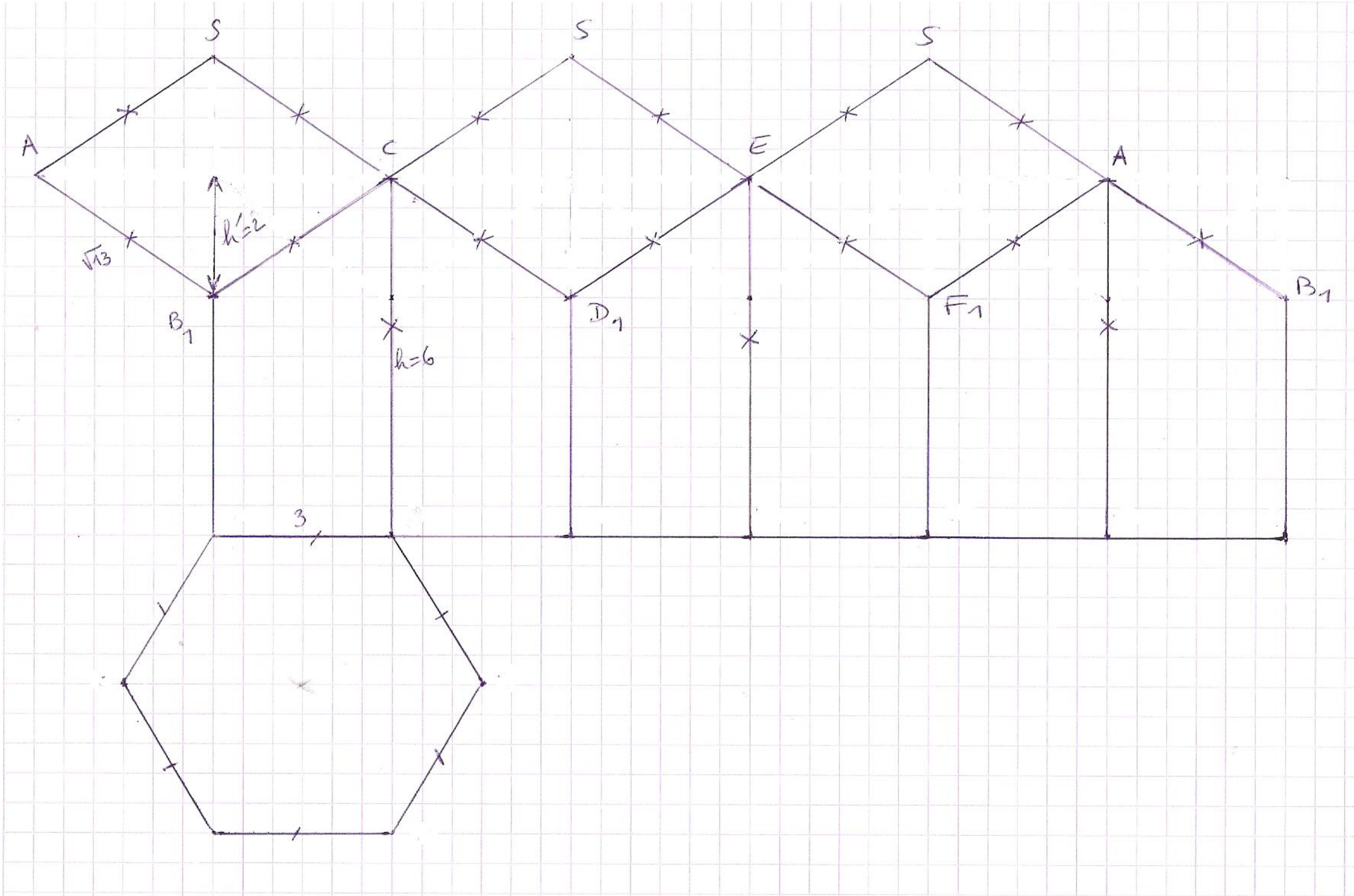
Calculons le volume du premier. Le tétraèdre $SABC$ à pour hauteur (SO) car (SO) est orthogonale au plan de base de ce tétraèdre (ABC). Ainsi :

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} A_{ABC} \times SO = \frac{1}{3} \frac{a^2 h' \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 h' \sqrt{3}}{12}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} V_{Alvéole} &= V_{\text{Prisme+Pyramide}} - 6V_{SABC} \\ &= (h + 3h') \frac{a^2\sqrt{3}}{2} - 6 \times \frac{a^2 h' \sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{ha^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3h' a^2 \sqrt{3}}{2} - \frac{h' a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{ha^2\sqrt{3}}{2} - h' a^2 \sqrt{3} = \left(\frac{h}{2} - h'\right) a^2 \sqrt{3}. \end{aligned}$$

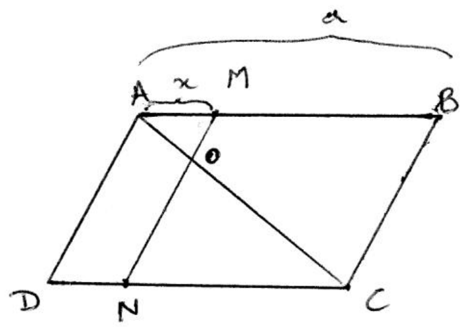
3°)



S
S
S
A
C
E
A
$h'=2$
$\sqrt{13}$
B_1
D_1
F_1
B_1
$h=6$
3

__Appendice :__ $ABCD$ est un parallélogramme, M est un point de $[AB]$ et N est un point de $[CD]$ tel que $DN = AM$. Démontrer que $(MN)//(AD)//(BC)$ puis que $MN = AD = BC$.

Cet exercice est célébrissime. C'est un passage des Eléments d'Euclide.



1ère méthode : avec la géométrie affine (théorème de Thalès et compagnie) :

Soit O l'intersection de (MN) et (AC). Dans les triangles AMO et ONC, étant donné que $(AM)//(NC)$, le théorème de Thalès donne :

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AM}{NC}.$$

Dès lors, si x désigne la distance AM et a la distance AB on a donc :

$$\frac{AO}{OC} = \frac{x}{a - x}.$$

Or, on sait que $DN = AM$ donc, le quotient : $\frac{DN}{NC}$ vaut aussi: $\frac{x}{a-x}$ donc

$$\frac{AO}{OC} = \frac{DN}{NC}.$$

Dès lors le théorème réciproque de Thalès projectif dans les triangles CON et CDA affirme que : $(ON)//(AD)$, donc $(MN)//(AD)$, et $(AD)//(BC)$ car $ABCD$ est un parallélogramme, donc $(MN)//(AD)//(BC)$.

Dès lors, $AMND$ est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles, il s'agit donc d'un parallélogramme et donc $AD = MN$.

2ème méthode, les vecteurs : Considérons le vecteur $\overrightarrow{AM}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont égaux, simplement parce qu'ils ont les mêmes caractéristiques (même direction car $(AM)//(DN)$ puisque $(AB)//(CD)$, même sens et même longueur puisque $AM = DN$), dès lors, par le théorème du parallélogramme (cours sur les vecteurs) : $AMND$ est un parallélogramme et on en déduit tout ce qui est demandé comme précédemment.

Rappel : **Théorème (de Thalès) : Version projective** : Soient ABC et AEF deux triangles tels que A, E et B et A, F et C sont alignés, ou bien E, A et B et F, A et C sont alignés. Alors

$$(BC)//(EF) \Leftrightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF}$$

(Pas de complément pour cette version)