

Question préliminaire :

Soit (C) un cercle de rayon R . On note A et p l'aire et le périmètre de ce cercle.

Démontrer que : $A = \frac{p^2}{4\pi}$.

Le problème en question :

I : On prend une feuille de papier de 21cm de large et 29,7cm de long. (Format A4)

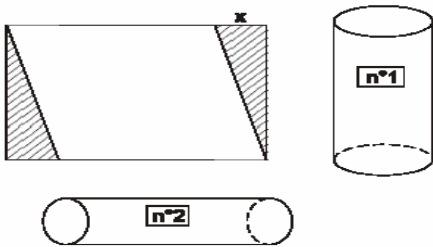
On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés.

En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.

Quels sont les périmètres des bases de ces cylindres ?

Les deux cylindres ont-ils le même volume ?

II : Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de même dimension selon la figure ci-dessous.



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1).

Si on la roule en faisant coïncider les autres bords, on obtient un second cylindre (n°2).

1°) Considérons d'abord (C_1) le premier cylindre, montrer que son volume V_1 est :

$$V_1 = \frac{21(29,7 - x)^2}{4\pi} \text{ cm}^3$$

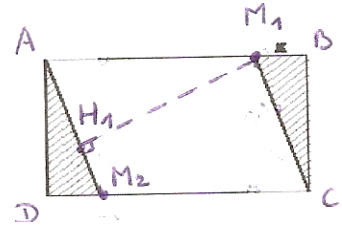
2°) Considérons le cylindre (C_2) le second cylindre, et considérons H_1 le projeté orthogonal de M_1 sur (AM_2) .

a) Montrer que $\widehat{DAM_2} = \widehat{AM_1H_1}$.

b) En déduire que $M_1H_1 = \frac{21(29,7-x)}{\sqrt{21^2+x^2}} \text{ cm}$, puis que :

$$V_2 = \frac{21(29,7 - x)\sqrt{x^2 + 21^2}}{4\pi} \text{ cm}^3$$

c) Trouver la ou les valeurs de x (en cm) (arrondies à 10^{-2} près) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.



Correction :

Question préliminaire :

Si p désigne le périmètre A , l'aire d'un cercle de rayon R , on a : $\begin{cases} p = 2\pi R \\ A = \pi R^2 \end{cases}$.

Dès lors : $R = \frac{p}{2\pi}$, et en remplaçant dans A :

$$A = \pi \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 = \frac{\pi p^2}{4\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi}.$$

Le problème en question :

I : V_1, V_2 désignent les volumes respectivement des cylindres obtenus de hauteur 21cm, et de hauteur 29,7cm.

Alors, pour V_1 , le périmètre de la base est de 29,7, et pour l'autre cylindre : 21cm. D'après la question précédente, donc :

$$V_1 = \left(\frac{29,7^2}{4\pi} \right) \times 21 \approx 1474,08 \text{ cm}^3;$$

$$V_2 = \left(\frac{21^2}{4\pi} \right) \times 29,7 \approx 10,42,28 \text{ cm}^3.$$

Les deux cylindres n'ont pas le même volume.

II :

1°) On observe que : $h_1 = 21 \text{ cm}, p = 29,7 - x$, donc :

$$V_1 = \frac{21(29,7 - x)^2}{4\pi}.$$

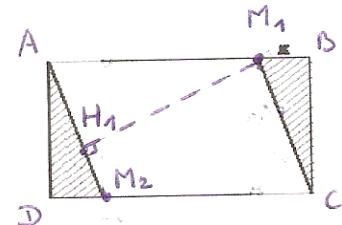
2°) a) $\widehat{DAM_1} = 90^\circ = \widehat{DAM_2} + \widehat{H_1AM_1}$ or, le triangle AM_1H_1 est rectangle en H_1 , donc :

$$\widehat{H_1AM_1} + \widehat{AM_1H_1} + \widehat{M_1H_1A} = \widehat{H_1AM_1} + \widehat{AM_1H_1} + 90^\circ = 180^\circ.$$

Donc :

$$\widehat{H_1AM_1} + \widehat{AM_1H_1} = 90^\circ.$$

$$\begin{cases} \widehat{DAM_2} + \widehat{H_1AM_1} = 90^\circ. \\ \widehat{H_1AM_1} + \widehat{AM_1H_1} = 90^\circ. \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAM_2} = \widehat{H_1AM_1}.$$



b) Dès lors :

$$\cos(\widehat{DAM_2}) = \cos(\widehat{H_1AM_1}) \Rightarrow \frac{DA}{AM_2} = \frac{M_1H_1}{AM_1}.$$

Or, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ADM_2 en D :

$$AD^2 + DM_2^2 = AM_2^2 : AM_2^2 = 21^2 + x^2 : AM_2 = \sqrt{x^2 + 21^2}.$$

Donc, en remplaçant dans les rapports égaux :

$$\frac{21}{\sqrt{x^2 + 21^2}} = \frac{M_1H_1}{29,7 - x} \Rightarrow M_1H_1 = \frac{21(29,7 - x)}{\sqrt{x^2 + 21^2}}.$$

La hauteur du cylindre V_2 est M_1H_1 , son périmètre $AM_2 = \sqrt{x^2 + 21^2}$, donc :

$$V_2 = \frac{(\sqrt{x^2 + 21^2})^2}{4\pi} \times \frac{21(29,7 - x)}{\sqrt{x^2 + 21^2}} = \frac{21(29,7 - x)\sqrt{x^2 + 21^2}}{4\pi} \text{ cm}^3.$$

c) On résout l'équation $V_1 = V_2$:

$$\frac{21(29,7 - x)\sqrt{x^2 + 21^2}}{4\pi} = \frac{21(29,7 - x)^2}{4\pi}.$$

Comme $\frac{21}{4\pi} \neq 0$ et $29,7 - x \neq 0$, on simplifie par : $\frac{21}{4\pi}(29,7 - x)$, donc l'équation devient :

$$\sqrt{x^2 + 21^2} = (29,7 - x).$$

En élevant au carré chaque membre de l'équation :

$$x^2 + 21^2 = (29,7 - x)^2:$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 21^2 = x^2 - 2 \times 29,7 \times x + 29,7^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 + 2 \times 29,7x = 29,7^2 - 21^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 29,7x = 29,7^2 - 21^2:$$

$$x = \frac{29,7^2 - 21^2}{2 \times 29,7} \approx 7,43cm.$$