Bases d'ondelettes et applications

Déf 1 : (Analyse Multirésolution)
Une AMR de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$, telle que

(a) $\forall j \in \mathbb{Z}, \; V_j \subset V_{j+1}$,

(b) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,

(c) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$

(d) $\forall j \in \mathbb{Z}, \; \forall f \in L^2(\mathbb{R})$

$f \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1}$

(e) $\exists g \in V_0$,
$\{g(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de V_0.

Déf 2 : H est un Hilbert séparable.
Une famille $\{e_k, k\in\mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de H si elle satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\overline{\mathrm{vec}\{e_k, k\in\mathbb{Z}\}} = H$

(ii) $\{e_k, k\in\mathbb{Z}\}$ est une suite de Riesz :
$\exists\, c' > c > 0$, $\forall (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$ (nbre fini de termes non nuls) :

$$c\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_k \Big\|^2 \leq c' \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 .$$

Rem :
(i) Exercice : Toute base de Riesz est image d'une base orthonormée de H par un isomorphisme.
(ii) Il y a plein de suites de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant (a), (b), (c).
Mais (d) et (e) sont spécifiques aux (AMR)

Prop 3 :
(i) (d) de Déf 1 signifie que chaque V_j est une dilatation de V_0 :

$$V_j = \{ f(2^j \cdot), f \in V_0 \} \text{ pour } \forall j \in \mathbb{Z}.$$

(ii) (e) de Déf 1 signifie que V_0 est le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions f dont la transformée de Fourier $\hat{f}$ s'écrit pour Lebesgue presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\xi) = \lambda_f(\xi)\,\hat{g}(\xi),$$

où $\lambda_f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

$$\Big(\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx \Big).$$

Lem 4 : Soit $h \in L^2(\mathbb{R})$.
$\{ g(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de Riesz $\iff \exists\, c' \geq c > 0$, pour Lebesgue presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$c \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2\pi k)|^2 \leq c'$$

(Lem 4 technique demandant l'usage d'approximations de l'unité sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, majorées par des noyaux de Cauchy).

Cor 5 (au Lem 4).
$\{ g(\cdot - k), k\in\mathbb{Z}\}$ est une suite orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$
$\iff$ Pour Lebesgue presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1 .$$

Preuve : (Prop 3) :
(i) est évident
(ii) $\{g(\cdot - k), k\in\mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de V_0 donc $f \in V_0$ s'exprime :

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\, g(\cdot - k) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$

où $(b_k)_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$.
Alors on a :

$$\hat{f}(\xi) = \underbrace{\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{-ik\xi}\Big)}_{\lambda_f(\xi) \leftarrow 2\pi\text{-périodique}} \hat{g}(\xi) \text{ pour}$$

Lebesgue presque $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $\lambda \in L^2(\mathbb{R}/2\pi)$, alors il existe $(a_k)_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$ telle que :

$$\int_0^{2\pi} \Big| \lambda(\xi) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{-ik\xi} \Big|^2 d\xi \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Il faut montrer que

$$\Big(\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{-ik\xi}\Big)\hat{g} \xrightarrow[N\to\infty]{L^2(\mathbb{R})} \lambda \hat{g} .$$

$\xi \mapsto \left|\lambda(\xi) - \sum_{-N}^{N} a_k e^{-ik\xi}\right|^2$ est 2π-périodique. Par le Lemme 4(ii):

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\lambda(\xi) - \sum_{-N}^{N} a_k e^{-ik\xi}\right|^2 |\hat g(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left|\lambda(\xi) - \sum_{-N}^{N} a_k e^{-ik\xi}\right|^2 \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat g(\xi+2\pi k)|^2\right| d\xi$$

$$\leq c' \int_0^{2\pi} \left|\lambda(\xi) - \sum_{-N}^{N} a_k e^{-ik\xi}\right|^2 d\xi$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$ ■

<u>Prop 6:</u> Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une AMR de $L^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $j\in\mathbb{Z}$, soit W_j le ss espace de V_{j+1} tel que:

$$V_{j+1} = V_j \overset{\perp}{\oplus} W_j.$$

Par la prop 4(i), on a:

$$W_j = \{ f(2^j\cdot),\ f\in W_0\}$$

De plus, on déduit, de (a)(c) de la Déf 1, que pour tout $J\in\mathbb{Z}$:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_{j=J}^{+\infty}} W_j\right) \text{ et } L^2(\mathbb{R}) = \overset{\perp}{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}} W_j.$$

<u>Exemple:</u> AMR de Haar: $g = \mathbb{1}_{[0,1)}$

$$V_j = \{ f\in L^2(\mathbb{R}),\ \forall k\in\mathbb{Z},\ f|_{[2^{-j}k,\, 2^{-j}(k+1))} = cte\}.$$

(AMR) simple, mais g est discontinue, elle a cet inconvénient. ($\{g(\cdot-k)\}_k$ est orthonormée)

<u>Régularisation</u>: Soit $m\geq 1$.

$$\tilde g = \underbrace{\mathbb{1}_{[0,1)} * \cdots * \mathbb{1}_{[0,1)}}_{m} : \ supp(\tilde g) = [0, m+1]$$

$$V_j = \{ f\in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{R}),\ \forall k\in\mathbb{Z},\ f|_{[2^{-j}k,\, 2^{-j}(k+1)]} \in \mathbb{R}_m[x]\}.$$

$\{\tilde g(\cdot - k),\ k\in\mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de V_0. Mais cette base n'est plus orthonormée ...

Partant d'une AMR avec g "engendrant" V_0, on peut toujours construire une fonction φ tq $\{\varphi(\cdot-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0:

<u>Prop 7:</u>

- Soit $\varphi\in L^2(\mathbb{R})$ définie, pour Lebesgue presque tout $\xi\in\mathbb{R}$, par sa transformée de Fourier:

$$\hat\varphi(\xi) = \frac{\hat g(\xi)}{\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat g(\xi+2\pi k)|^2\right]^{1/2}}.$$

Alors il existe $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (b_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, telles que, dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k g(\cdot - k) \text{ et } g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \varphi(\cdot-k).$$

- De plus, $\{\varphi(\cdot-k),\ k\in\mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0. Et, pour tout $J\in\mathbb{Z}$,

$\{2^{J/2}\varphi(2^J\cdot - k),\ k\in\mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_J.

<u>Preuve</u>: (Prop 7):

$\{g(\cdot-k),\ k\in\mathbb{Z}\}$ étant une base de Riesz de V_0, le Lemme 4 nous informe que les fonctions 2π-périodiques:

$$\xi \mapsto \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat g(\xi+2\pi k)|^2\right]^{\varepsilon/2} \quad \varepsilon = \pm 1$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, puisque

$$c \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat g(\xi+2\pi k)|^2 \leq c'. \quad (*)$$

Il existe donc 2 suites $(a_k^{(\varepsilon)})_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ telles que:

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} \left|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat g(\xi+2\pi k)|^2\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} - \sum_{-N}^{N} a_k^{(\varepsilon)} e^{-ik\xi}\right|^2 d\xi = 0, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

On doit montrer que:

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x) - \sum_{-N}^{N} a_k^{(-1)} g(x-k)\right|^2 dx = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left|g(x) - \sum_{-N}^{N} a_k^{(1)} \varphi(x-k)\right|^2 dx = 0 \quad (2)$$

Montrons (1) par exemple: par la formule de Plancherel, combiné à $(*)$:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\varphi(x) - \sum_{-N}^{N} a_k^{(-1)} g(x-k)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\hat\varphi(\xi) - \sum_{-N}^{N} a_k^{(-1)} e^{-ik\xi} \hat g(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\underset{\text{déf de }\varphi}{=} \int_{\mathbb{R}} \left|\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat g(\xi+2\pi k)|^2\right]^{-1/2} - \sum_{-N}^{N} a_k^{(-1)} e^{-ik\xi}\right|^2 |\hat g(\xi)|^2 d\xi$$

$$\underset{2\pi}{=} \int_0^{2\pi} \left|\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat g(\xi+2\pi k)|^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \sum_{-N}^{N} a_k^{(-1)} e^{-ik\xi}\right|^2 \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat g(\xi+2\pi m)|^2\right) d\xi$$

$$\leq c' \int_0^{2\pi} \left|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat g(\xi+2\pi k)|^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \sum_{-N}^{N} a_k^{(-1)} e^{-ik\xi}\right|^2 d\xi$$

Enfin, $\{\varphi(\cdot-k), k\in\mathbb{Z}\}$ est orthonormée de V_0 car $\mathrm{vec}\{\varphi(\cdot-k), k\in\mathbb{Z}\} = \mathrm{vec}\{g(\cdot-k), k\in\mathbb{Z}\}$ et :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat\varphi(\xi+2\pi m)|^2 = \frac{\sum_k |\hat g(\xi+2\pi k)|^2}{\sum_m |\hat g(\xi+2\pi m)|^2} = 1$$

Le corollaire 5 s'applique. ■

Prop 8 : Soit φ de la Prop 7. Alors il existe $m_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ telle que pour Lebesgue presque tout $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\hat\varphi(2\xi) = m_0(\xi)\hat\varphi(\xi), \quad (1)$$

et $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$. (2)

En particulier $m_0(0) = 1$ et $m_0(\pi) = 0$.

- φ est appelée fonction d'échelle (en écho à (1)).
- m_0 est appelé filtre quadratique (2).

Ainsi pour L-p.p $\forall\, \xi\in\mathbb{R}$

$$\hat\varphi(\xi) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0(2^{-k}\xi).$$

Preuve : $\hat\varphi(2\xi) = \widehat{2^{-1}\varphi(2^{-1}\cdot)}(\xi)$

Et $2^{-1}\varphi(2^{-1}\cdot) \in V_{-1}\subset V_0$, donc d'après la Prop. 4 :

$$\hat\varphi(2\xi) = \underbrace{\lambda_{\varphi(2\cdot)}(\xi)}_{m_0(\xi)}\hat\varphi(\xi)$$

Ensuite, d'après le Cor. 5 :

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat\varphi(2\xi+2k\pi)|^2$$

$$= |m_0(\xi)|^2\Big(\overbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat\varphi(\xi+2k\pi)|^2}^{1}\Big) + |m_0(\xi+\pi)|^2\Big(\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat\varphi(\xi+\pi+2k\pi)|^2}_{1}\Big)$$

$$m_0(0) = \frac{\hat\varphi(0)}{\hat\varphi(0)} = 1.$$ ■

Posons maintenant : $m_1 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ défini pp $\forall\, \xi\in\mathbb{R}$:

$$m_1(\xi) = e^{-i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}.$$

On a encore :

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi+\pi)|^2 = 1$$

et :

$$m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{m_1(\xi+\pi)} = 0$$

Théorème 9 (Mallat, Meyer 1985) : Soit $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ tq p.p $\forall\, \xi\in\mathbb{R}$:

$$\hat\psi(2\xi) = m_1(\xi)\hat\varphi(\xi),$$
(φ de la Prop 8 et 9).

alors :

(i) $\{\psi(\cdot-k), k\in\mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de W_0.

(ii) $\{2^{j/2}\psi(2^j\cdot-k), (j,k)\in\mathbb{Z}^2\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. ψ est appelée fonction mère.

Remarque : Soit $\alpha\geq 0$ et soient :

$\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}) = \{\phi\in L^1(\mathbb{R}), \text{ Hölder d'ordre } \alpha\}$.

$\mathcal{R}^\alpha(\mathbb{R}) = \{\phi\in L^1(\mathbb{R}), x\mapsto(1+|x|^\alpha)|\hat\phi(x)|\in L^1(\mathbb{R})\}$

$\mathcal{D}^\alpha(\mathbb{R}) = \{\phi\in L^1(\mathbb{R}), x\mapsto(1+|x|^\alpha)|\hat\phi(x)|\in L^\infty(\mathbb{R})\}$

$\mathcal{C}^\alpha_c(\mathbb{R}) = \{\phi\in\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}), \text{ supp compact}\}$.

$\mathcal{D}^\alpha_c(\mathbb{R}) = \{\phi\in\mathcal{D}^\alpha(\mathbb{R}), \text{ supp compact}\}$.

Alors on a, $\forall\, \varepsilon>0$:

$$\mathcal{D}^{\alpha+1+\varepsilon}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}^\alpha(\mathbb{R}) \overset{\circledast}{\subset} \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R})$$

$$\left(\int \frac{dx}{1+|x|^{1+\varepsilon}} < \infty\right)$$

$$|\phi(t_1)-\phi(t_2)| = (2\pi)^{-1}\left|\int_{\mathbb{R}}\hat\phi(x)e^{it_1x}\,dx - \int_{\mathbb{R}}\hat\phi(x)e^{it_2x}\,dx\right|$$

puis on coupe $\int_{\{|x|\geq R\}}$ et $\int_{\{|x|\leq R\}}$ ...

⊛ Plus la Fourier décroît vite vers 0 à l'∞, plus la fonct° est régulière.

Et $\mathcal{C}^\alpha_c(\mathbb{R})\subset\mathcal{D}^{(\alpha)}_c(\mathbb{R})$: si le départ est continue à supp compact, la Fourier décroîtra vite vers 0 à l'infini, d'autant fortement qu'est la régularité.

Exercice : $\delta>0$,

si $K_\delta(x) = \delta^{-1/2}e^{-\frac{\pi x^2}{\delta^2}}$ alors :

$$\hat{K}_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2} = \delta^{-\frac12}K_{\frac1\delta}(x).$$

Une fonction et sa Fourier ne peuvent pas être toutes les deux simultanément concentrées (localisées) autour de l'origine. C'est en lien avec le <u>principe d'Heisenberg de Physique quantique</u>.

Daubechies a cherché à partir de ma polynomiale trigonométrique, φ régulières à support compacts.

<u>Théorème</u> : (Meyer, 1986) :
Il existe une fonc d'échelle φ et une f° mère ψ qui génèrent une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie :

(i) $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(ii) $supp(\hat{\varphi}) \subset [-\frac{4\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}]$, et pour tt $\xi \in [-\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}]$: $\hat{\varphi}(\xi) = 1$

(iii) $supp(\hat{\psi}) \subset [\frac{-8\pi}{3} ; \frac{8\pi}{3}] \setminus (-\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3})$

($\hat{\psi}$ est nulle ds un $v(0)$).

La base orthonormée
$\{\underbrace{2^{j/2}\psi(2^{j}\cdot - k)}_{\psi_{j,k}}, (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ de $L^2(\mathbb{R})$
est appelée base d'ondelettes de Meyer.

De plus :
$\{\hat{\psi}_{j,k}, (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ est aussi une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

<u>Rappel</u> :
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la classe de Schwartz est l'espace des f° $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall p, N \in \mathbb{N}$:
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|^N) |f^{(p)}(x)| < +\infty$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un ss espace de $L^2(\mathbb{R})$ invariant par la Fourier.

f bornée et $\psi \in L^1(\mathbb{R})$

<u>la transformée d'ondelette réciproque est donnée par</u> :
$$f(x) = \int_{\{a>0\}} \left(\int_{\mathbb{R}} W_f(a,b)\, \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{db}{a} \right) \frac{da}{a}.$$
pour L-p tt $x \in \mathbb{R}$.
(dans $L^2(\mathbb{R})$)