

Analyse par ondelettes et applications

Louckx Christophe

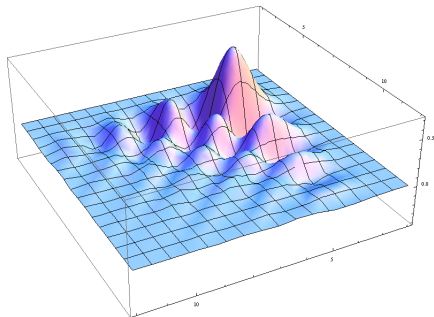
Laboratoire Paul Painlevé, Lille, France

Organisation

- 1 Introduction
- 2 Les limites de l'analyse de Fourier
- 3 Dé bruitage, traitement d'images
- 4 Usage en Mathématiques, exposants de Hölder ponctuels de fonctions erratiques
- 5 À la recherche des bases orthonormées d'ondelettes

À quoi vous fait penser le mot "ondelettes" ?

À quoi vous fait penser le mot "ondelettes" ?



Ondelettes de Daubechies, dimension 2

À quoi vous fait penser le mot "ondelettes" ?



Une ondelette est une fonction oscillante (ce qui explique le mot « onde ») de moyenne nulle appelée ψ . Son support, intervalle sur lequel l'ondelette est non nulle, est compact (ce qui explique le mot « ondelette », qui veut dire petite onde).

L'ondelette mère ψ génère une famille d'ondelettes $\psi_{u,s}(t)$ où u est le paramètre du temps et s le paramètre d'échelle. L'ondelette $\psi_{u,s}$ est simplement l'ondelette mère ψ translatée de u et: soit dilatée par s si $s > 1$, soit contractée par s si $s < 1$, soit conservée si $s = 1$. Par conséquent, quand l'échelle s augmente, le support de l'ondelette grandit.

- Depuis les travaux de Haar (années 1910), nous savons qu'il existe des bases de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$\{\psi_{j,k}(\bullet), (j,k) \in \mathbb{Z}^2\} = \{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \bullet - k), (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}, \quad (1.1)$$

construites à l'aide de dilatation par des puissances de 2 et des translations par des entiers d'une fonction ψ nommée fonction mère.

- Ce système de Haar est généré par la fonction mère définie pour tout x par

$$\psi(x) = \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{2}]}(x) - \mathbb{1}_{(\frac{1}{2}, 1]}(x). \quad (1.2)$$

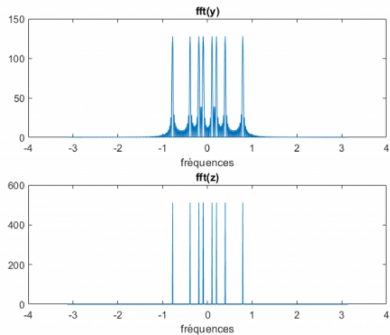
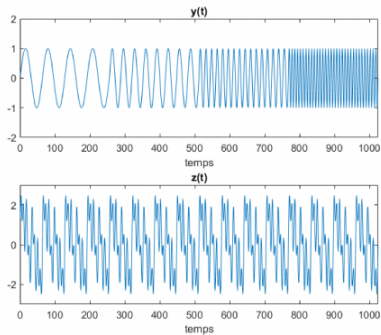
- Dans les années 80 et 90, la construction de bases (orthonormées de surcroît) plus régulières a été systématisée par I. Daubechies, S. Mallat and Y. Meyer dans le cadre de la théorie des ondelettes.



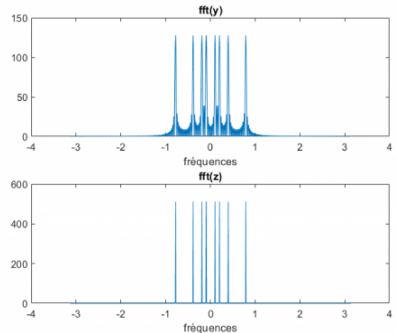
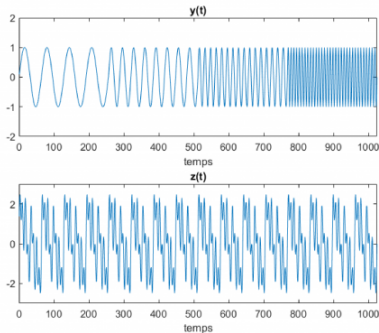
Organisation

- 1 Introduction
- 2 Les limites de l'analyse de Fourier
- 3 Dé bruitage, traitement d'images
- 4 Usage en Mathématiques, exposants de Hölder ponctuels de fonctions erratiques
- 5 À la recherche des bases orthonormées d'ondelettes

Au restaurant, nous devenons rapidement insensibles au bruit de nos voisins; mais un brusque silence nous rappelle leur présence. Notre attention est attirée par les événements momentanés, par opposition aux phénomènes permanents que nous ignorons vite. La priorité accordée aux événements momentanés est probablement une stratégie de notre cerveau pour sélectionner les informations importantes, parmi le grand nombre de données auxquelles nous sommes exposés. La stratégie des ondelettes se fonde sur cette constatation.

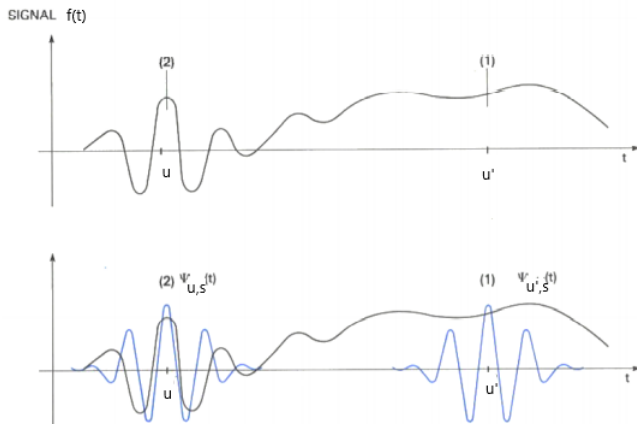


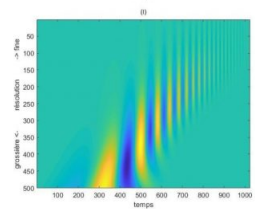
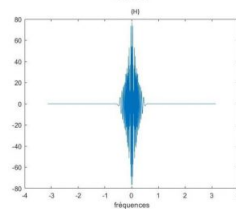
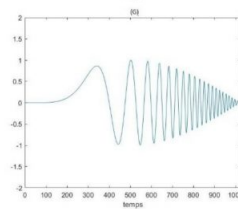
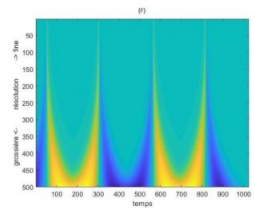
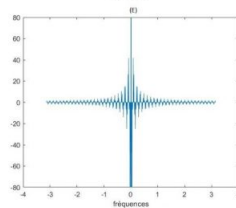
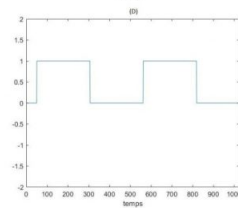
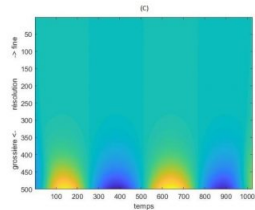
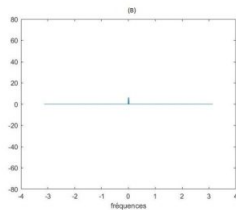
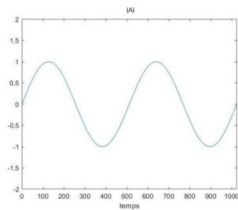
Deux signaux différents à gauche et à droite leurs transformées respectives de Fourier.



Deux signaux différents à gauche et à droite leurs transformées respectives de Fourier.

La transformée de Fourier donne la quantité de chaque fréquence présente dans le signal pour l'ensemble de la période d'observation. La théorie de Fourier devient donc inefficace pour un signal dont le spectre des fréquences varie considérablement dans le temps.

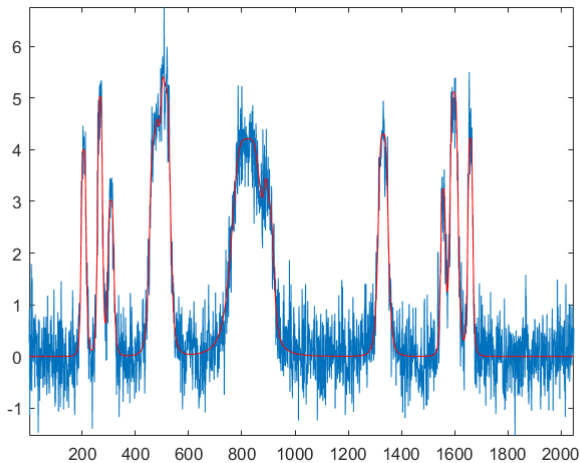




Organisation

- 1 Introduction
- 2 Les limites de l'analyse de Fourier
- 3 Dé bruitage, traitement d'images**
- 4 Usage en Mathématiques, exposants de Hölder ponctuels de fonctions erratiques
- 5 À la recherche des bases orthonormées d'ondelettes

Stéphane Mallat a observé dans les années 80 des calculs similaires pour la recherche de techniques de dé bruitage de sons et d'images. En lisant un article d'Yves Meyer (qui tentait déjà de généraliser la base de Haar), Mallat s'est aperçu que les calculs d'ingénierie qu'il a étudiés revenaient à rechercher des bases similaires à celle de Haar; il fallait trouver une fonction adéquate pour trouver la fonction mère, Meyer et Mallat ont travaillé de concert, cette fonction fut baptisée filtre quadratique (nous y reviendrons).



En rouge le signal dé bruité par ondelettes.

Des travaux communs avec Meyer, Mallat a créé le format JPEG2000 des images. Qu'est-ce ?

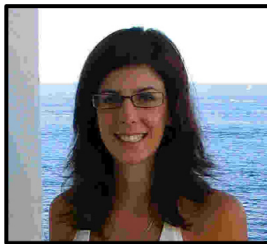
Un pixel correspond à un coefficient d'ondelette.

- Étape 1: le signal est compressé en coefficients d'ondelettes.
- Étape 2: Sélection des quelques coefficients hautement significatifs, les autres contenant peu d'information étant mis à zéro. Similaire au seuillage lors du dé bruitage de signaux.
- Étape 3 : Enfin, il est alors facile de stocker avec peu d'espace mémoire cette représentation en ondelettes remplie d'éléments nuls.
- Étape 4 : Conception de l'image JPEG2000: transformation inverse par ondelettes. Bien sûr, l'image compressée diffère légèrement de l'image de départ, mais les différences sont imperceptibles.

Sources :

<https://interstices.info/lanalyse-par-ondelettes-dans-la-vie-de-tous-les-jours/>

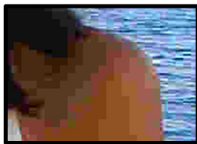
<https://interstices.info/de-la-transformee-de-fourier-a-la-transformee-par-ondelettes-le-succes-de-lanalyse-temps-frequence/>



Jpeg



Jpeg 2000



Plus le filtre quadratique est régulier, plus la qualité est meilleure et élimine les phénomènes de bord (la reconnaissance des empreintes digitales est établie à partir des techniques d'ondelettes). L'imagerie médicale a considérablement progressé avec les ondelettes et elles sont systématiquement utilisées aujourd'hui.

Organisation

- 1 Introduction
- 2 Les limites de l'analyse de Fourier
- 3 Dé bruitage, traitement d'images
- 4 Usage en Mathématiques, exposants de Hölder ponctuels de fonctions erratiques**
- 5 À la recherche des bases orthonormées d'ondelettes

Definition 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Fixons $\tau \in \mathbb{R}$. L'exposant ponctuel de Hölder de f en τ est :

$$\rho_f(\tau) := \sup \left\{ \gamma \in [0, 1], \limsup_{t \rightarrow \tau} \frac{|f(t) - f(\tau)|}{|t - \tau|^\gamma} < +\infty \right\}. \quad (4.3)$$

Soit une fonction (mère) ψ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $|\psi(x)| \leq C(1 + x^2)^{-1}$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$.

Definition 2

Considérons pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ la fonction $\psi_{a,b} \in L^1(\mathbb{R})$ par

$$\psi_{a,b}(x) := a^{-1} \psi\left(\frac{x - b}{a}\right).$$

Pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, la transformée d'ondelette de f est donnée pour tous $a > 0, b \in \mathbb{R}$ par

$$W_f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi}_{a,b}(x) dx = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi}\left(\frac{x - b}{a}\right) dx.$$

Theorem 3 (S. Jaffard, 1996)

Supposons que $0 < \alpha' < \alpha < 1$. Si la transformée d'ondelettes $W_f(a, b)$ d'une fonction bornée f vérifie

$$|W_f(a, b)| \leq Ca^\alpha \left(1 + \frac{|b - \tau|}{a}\right)^{\alpha'},$$

dans un voisinage $0 < a < a_0, |b - \tau| < b_0$, alors f appartient à $\mathcal{C}^\alpha(\tau)$ (l'espace des fonctions Höldériennes d'ordre α au voisinage de τ).

Theorem 4 (S. Jaffard, 1996)

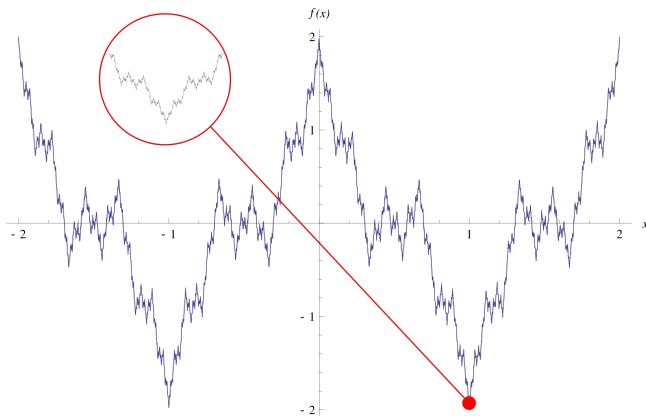
Soit f une fonction bornée et Höldérienne d'ordre $\beta \in (0, 1)$. Alors pour tout point $\tau \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\rho_f(\tau) = \liminf_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \tau}} \frac{\log |W_f(a, b)|}{\log(a + |\tau - b|)} \quad (4.4)$$

Definition 5 (La fonction de Weierstrass)

$$\mathcal{W}_{A,B}(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} B^n \cos(A^n t) \text{ , où } 0 < B < 1, AB \geq 1.$$

Voici $\mathcal{W}_{3,1/2}$



Il était connu que $\mathcal{W}_{A,B}$ n'est nulle part dérivable. Mais, nous ignorions totalement à quel point elle est continue, et si cela ne varierait pas d'un point à un autre...Faisant usage de ses deux théorèmes, S. Jaffard démontra alors en 1996, à l'aide d'une fonction mère bien choisie,

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \rho_{\mathcal{W}_{A,B}}(\tau) = -\frac{\log B}{\log A}.$$

La théorie des ondelettes est capitale en analyse dite multifractale. Également, l'étude fine des trajectoires de champs stochastiques admettant une version continue fait usage des bases d'ondelettes.

Source : Wavelets Tools for Science and Technology, Jaffard, Meyer, D. Ryan, SIAM 2001.

Organisation

- 1 Introduction
- 2 Les limites de l'analyse de Fourier
- 3 Dé bruitage, traitement d'images
- 4 Usage en Mathématiques, exposants de Hölder ponctuels de fonctions erratiques
- 5 À la recherche des bases orthonormées d'ondelettes**

Source : <https://pro.univ-lille.fr/antoine-ayache/enseignements>

Tout en bas de la page : A mini-course on Wavelets and Fractional Processes
(Handout in English)

Son livre : Multifractional stochastic fields: wavelet strategies in multifractional
frameworks, World Scientific, 2009.